Math. U. 307 q
56

Math. U 3079

Kb20.

K. 6 20.

H 179

Joseph Spenglers,
öffentlichen Lehrers der Mathematik
auf der hohen Schule zu Dillingen,

K. b. 20.

...RIE REGIMENT PRINZ LUITPOLD

Anfangsgründe
der
Rechenkunst und Algebra.

Siebente und ganz neu bearbeitete Auflage.

Von
Andreas Christian Mayer,
Ingenieur und Weinvisierer.

f. Sch.

f. Sch.

Augsburg,
in der Ignaz Veith und Michael Riegerschen
Buchhandlung.

1800.

Gso. 28538

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Inhalt
des ersten Theils der Rechenkunst.

Erster Abschnitt. Von den vorzüglichsten Eigenschaften der Zahlen. . §. 1.—§. 13.
Zweyter Abschnitt. Von der Vermehrung in ungenannten Zahlen durch die Addition. §. 14.—§. 16.
Dritter Abschnitt. Von der Vermehrung in ungenanten Zahlen durch die Multiplication. . . . . . §. 17.—§. 23.
Vierter Abschnitt. Von der Verminderung der ungenannten Zahlen durch die Subtraction. §. 24.—§. 28.
Fünfter Abschnitt. Von der Verminderung der ungenannten Zahlen durch die Division. §. 29.—§. 33.
Sechster Abschnitt. Von den Brüchen und Rechnungsarten mit Brüchen. §. 34.—§. 57.
Siebenter Abschnitt. Von den Rechnungsarten in genannten Zahlen.
I. Durch die Addition. . . §. 58.
II. Durch die Subtraction. . §. 59.
III. Durch die Multiplication. §. 60.
IV. Durch die Division. . . §. 61.
Achter Abschnitt. Von den Verhältnißen und Proportionen. . . . §. 62.—§. 80.
Neunter Abschnitt. Von der Regel De-Tri überhaupt. . . . . . § 81—§. 89.
Zehnter Abschnitt. Von der einfachen Regel De-Tri . . . . . §. 90.—§. 91.

Elfter

Elfter Abschnitt. Von der zusammengesetzten Regel De-Tri. . . . §. 92.—§. 99.
Zwölfter Abschnitt. Von den Quadratzahlen u. Auszichung der Quadratwurzel §. 100.—§. 116.
Dreyzehnter Abschnitt. Von den Cubiczahlen u. Auszichung der Cubicwurzel. §. 117.—§. 125.
Vierzehnter Abschnitt. Von der Decimal-Rechnung. . . . §. 126.—§. 141.

Des zweyten Theiles der Algebra.

Erster Abschnitt. Von den Größen. §. 1.—§. 9.
Zweyter Abschnitt. Von den vier Rechnungsarten mit ganzen Größen. §. 10.—§. 23.
Dritter Abschnitt. Von den Brüchen. §. 24.—§. 34.
Vierter Abschnitt. Von den Quadratzahlen, von Auszichung der Wurzel und von den Irrational-Größen. . . §. 35.—§. 47.
Fünfter Abschnitt. Von den Proportionen und Progreßionen. . . . §. 48.—§. 81.
Sechster Abschnitt. Von den algebraischen Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe. . . §. 82.—§. 95.
Siebenter Abschnitt. Von den algebraischen Gleichnngen vom zweyten Grade mit einer unbekannten Größe. . . §. 96.—§. 97.
Achter Abschnitt. Von den algebraischen Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen. §. 98.—§. 106.
Neunter Abschnitt. Wie die algebraischen Gleichungen zu finden sind. §. 107.—§. 108.

Des

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

Des ersten Theiles

Erster Abschnitt.

Von den vorzüglichsten Eigenschaften der Zahlen.

§. 1.

Die Rechenkunst ist diejenige Wissenschaft, welche sich mit der Vergleichung verschiedener Zahlen beschäftiget, und zugleich diejenige Reglen vorschreibt, nach welchen man aus gegebenen bekannten Zahlen andere unbekannte Zahlen finden kann.

§. 2.

Ein gewißes Ganze, das man entweder selbst, oder deßen Theile man mehrmals zusammenzehlt, heißt eine Einheit.

§. 3.

Eine Menge ganzer Einheiten, nennt man eine **ganze Zahl**: hingegen eine Menge gleichgroßer Theile der Einheiten eine **gebrochene Zahl** oder einen **Bruch**.

§. 4.

Eine **abstrakte** oder **ungenannte Zahl** ist diejenige Zahl, bey der die besondere Beschaffenheit der zusammengezehlten Einheiten gar nicht in Betrachtung kommt; eine **concrete** oder **genannte Zahl** hingegen eine solche, welche eine gewisse Menge von Einheiten einer gewißen Art ausdrückt.

Zum Exempel. Die Zahl **fünf** überhaupt ist eine ungenannte Zahl; hingegen **fünf Pfund** eine genannte Zahl.

§. 5.

Diejenige Zeichen, welche man statt der gewöhnlichen Worte gebraucht, die Zahlen dadurch auszudrücken, werden **Ziffern** genannt. Diese Zeichen der Zahlen sind folgende:

1.	2.	3.	4.	5.	6.
Eins.	Zwey.	Drey.	Vier.	Fünf.	Sechs.
7.	8.	9.	0.		
Sieben.	Acht.	Neun.	Null.		

§. 6.

§. 6.

Die Null an und vor sich, oder wenn dieselbe allein steht, bedeutet gar nichts, und wird nur gebraucht, um eine leere Stelle auszufüllen, in welcher keine andere Ziffer steht, damit man daraus die Stellen der übrigen Ziffern, in einer Reihe erkennen, und darnach ihre Bedeutungen bestimmen könne.

§. 7.

Um aber durch die geschriebene Ziffern auszudrücken, was man bey den Worten beobachtet merke man folgende Regel:

Man schreibe die Ziffern von der rechten gegen die lincke Hand, und laße jede Ziffer in der folgenden Stelle zehnmal mehr bedeuten, als in der nächst vorhergehenden. In die Stellen, welche ledig bleiben müßen, setze man die sogenannte Null.

Zum Exempel.

in der ersten Stelle —	eins	— — — —	1.
— — zweyten — —	zehen	— — — —	10.
— — dritten — —	hundert	— — —	100.
— — vierten — —	tausend	— — —	1000.
— — fünften — —	zehentausend	— — —	10000.
— — sechsten — —	hundertausend	— — —	100000.
— — siebenten — —	eine Million	— —	1000000.
— — achten — —	zehen Millionen	— —	10000000.
— — neunten — —	hundert Millionen	—	100000000.
— — zehnten — —	tausend Millionen	—	1000000000.
— — eilften — —	zehntausend Millionen	—	10000000000.
— — zwölften — —	hunderttausend Millionen		100000000000.
— — dreyzehnten —	eine Billion.		1000000000000.

§. 8.

Unter dem Wort Numeriren versteht man nichts anders, als eine in Ziffern geschriebene

bene Zahl mit Worten aussprechen, oder eine ausgesprochene Zahl mit geschriebenen Ziffern anzeigen.

§. 9.

Eine jede Zahl, die mit Ziffern geschrieben wird, mit Worten auszusprechen.

Auflößung.

Ist die geschriebene Zahl sehr groß, so theile man

1) Die Ziffern von der rechten Hand gegen die linke in Classen, und gebe jeder Classe sechs Ziffer, da es denn gleich viel ist, wie viel Ziffern die letzte Classe zur linken Hand bekommt.

2) oberwärts an der siebenten Ziffer setze man einen Strich (′) an der dreyzehnten zwey Strich (″) an der neunzehnten drey Strich (‴) an der fünf und zwanzigsten vier Strich (⁗) u. s. w.

3) spreche man, wo ein Strich steht für Millionen, wo zwey Strich stehen für Billionen, drey Strich für Trillionen, vier Strich für Quadrillionen u. s. w. aus, und alle übrige gegen die rechte Hand zu liegende Ziffer nach der im §. 7. vorgeschriebenen Regel aus.

Zum Exempel.

3'''405621''543021'230567.

diese Zahl muß demnach also ausgesprochen werden:

Drey Trillionen, viermalhundert fünftausend sechshundert ein und zwanzig Billionen, fünfmalhundert drey und vierzigtausend ein und zwanzig Millionen, zweymal hundert dreyßigtausend fünfhundert sieben und sechszig.

§. 10.

Eine Zahl, die mit Worten ausgesprochen worden ist, mit Ziffern gehörig zu schreiben.

Auflößung. Man habe ausgesprochen:

Dreymalhundert acht undfünfzig Billionen, viermal hundert ein und zwanzigtausend neunhundert sieben und sechszig Millionen, fünfmalhundert acht und vierzigtausend dreyhundert ein und zwanzig, so mache man

1) auf dem Papier so viele Abtheilungen durch Striche, zwischen welche man je sechs Ziffer in einer Reihe schreiben könne, als die ausgesprochene Zahl erfordert; nemlich, wenn dieselbe nur Millionen enthält einen Strich; enthält dieselbe aber Billionen zwey Strich, wie im vorgegebenen Fall u. s. w.

2) schrei-

2) schreibe man jede ausgesprochene Zahl in die gehörige Stelle von der linken gegen die rechte Hand; die leeer gebliebenen Stellen aber fülle man mit Nullen aus.

als

358|421967|548321.

§. 11.

Die vorzüglichsten Hauptveränderungen, welche mit den Zahlen vorgenommen werden können, es mögen dieselbe ganze Zahlen oder Brüche seyn, bestehen darinn, daß sie sich **vermehren** oder **vermindern** lassen.

§. 12.

Die **Vermehrung** einer Zahl kann geschehen.

1) durch die **Addition**, wenn zu einer Zahl eine andere hinzugethan oder gesezt wird; oder

2) durch die **Multiplication**, wenn eine Zahl so vielmal genommen werden soll, als eine andere Einheiten enthält.

§. 13.

Die **Verminderung** einer Zahl kann geschehen

1) durch die **Subtraction**, wenn von einer Zahl eine kleinere weggenommen wird; oder

2) durch die **Division**, wenn von einer Zahl eine andere so vielmal als möglich abge-

zogen, und dadurch gefunden wird, wie vielmal sie in der erstern enthalten sey.

Anmerkung.

Zu Abkürzung der arithmetischen Arbeiten hat man folgende Zeichen eingeführt; als

Das Zeichen der Addition +
— — der Subtraction —
— — der Multiplication. Oder auch ein liegendes Andreaskreuz als ×,
— — der Division: zwey übereinander stehende Punkte, als :
— — der Gleichheit =

um anzuzeigen, daß eine Zahl größer sey, als eine andere sey, so bedient man sich eines lateinischliegenden V. dessen Oeffnung gegen die linke Hand als > die größere Zahl hingegen dessen Spitze gegen die rechte Hand die kleinere Zahl andeutet.

Zweyter Abschnitt.

Von der Vermehrung in ungenannten Zahlen durch die Addition.

§. 14.

Addiren heißt nichts anders, als zu einer gegebenen Zahl andere Zahlen hinzuthun. Diejenigen Zahlen, welche addirt werden sollen, nennt man die Posten, die gesuchte Zahl aber

aber, welche den Posten zusammen genommen gleich ist, die Summe.

§. 15.

Bey der Addition sind folgende Regeln zu beobachten, als:

1) setze man die gegebenen Posten so untereinander, daß die Ziffern von einerley Ordnung, nämlich die Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter Zehner, Hundert unter Hunderte u. s. w. gerade untereinander zu stehen kommen; und ziehe unter solche einen Strich.

2) zähle man die Ziffern, so untereinander stehen, und zwar zuerst die Einer oder Einheiten, hernach die Zehner, alsdenn die Hunderte u. s. w. zusammen; und die Summe setze man unter den Strich.

3) addire man die Zehner, welche aus den zusammengezehlten Einheiten entstehen, sogleich zu den gegebenen Zehnern, ebenso die Hunderte, welche aus den zusammengezehlten Zehnern entstehen, sogleich zu den gegebenen Hunderten, u. s. w. Die auf diese Art gefundene einzelne Summen zusammen genommen, geben die gesuchte Summe aller gegebenen Posten.

Zum Exempel.

Es seyen folgende drey Zahlen, als 897 789 und 977 gegeben: man soll die Summe dieser drey Zahlen finden.

Man setze nach der ersten Regel die gegebenen Zahlen untereinander, als

897
789
977
23
24
24
2663 Summe.

alsdenn zähle man nach der zweyten Regel die Ziffern so untereinander stehen, zusammen; so ist die Summe der ersten Reihe oder Einer gegen der rechten Hand — 23
der zweiten oder der Zehner — — 24
der dritten oder Hunderte — — 24
addirt man nun diese drey Summe zusammen, so kommt für die gegebenen drey Zahlen die Summe 2663 heraus.

§. 16.

Diese Rechnung, welche bey großen Exempeln erstaunend weitläuftig werden, und auch vieles Papier kosten würde, hat man in der Praxin Unbequemlichkeit halber zu verkürzen gesucht: und wird obiges Exempel nach folgender Regel gerechnet, als:

1) wenn in der Reihe der Einer oder Einheiten die Summe die Ziffer von 9. übersteigt, und folglich aus zweyen Ziffern besteht: so setze man blos die hintere Ziffer unter die erste Reihe, und behalte

2) die

2) die vordere im Sinn, oder in mente, und addire dieselbe zu den Zehnern. Besteht

3) die Summe der Reihe von Zehner ebenfalls aus mehr als einer Ziffer, so wird die erstere zu der Reihe der Hunderte addirt, und die hintere wird unter die Reihe der Zehner gesetzt:

897
789
977
2663

Diese Summe wird auf folgende Art gefunden: als 7 und 9 ist 16 und 7 ist 23, von dieser Ziffer wird die 3 als ein Einer oder Einheit unter den Strich in die Stelle der Einer gesetzt, die Ziffer 2. aber wird im Sinne oder in mente behalten, und zu der Ordnung der Zehner addirt, indem man sagt 2 und 7 ist 9 und 8 ist 17, und 9 ist 26, davon wird 6 neben die Ziffer 3 geschrieben, und 2 zu der Ordnung der Hunderte addirt. Man hätte im eigentlichsten Verstand aussprechen sollen 20 und 70 ist 90 und 80 ist 170, und 90 ist 260. Weil aber 6 in die Stelle der Zehner geschrieben worden, wo sie 60. andeutet, so wäre es überflüßig, die Zehner als Zehner zu benennen. Eben so wird die in mente oder im Sinn behaltene Ziffer 2 zu der Reihe der Hunderte addirt: und man sagt, 2 und 9 ist 11 und 7 ist 18, und 8 ist 26 diese Ziffer setzt man neben die zwey

vorhergehenden so wird also die Summe seyn 2663, und ausgesprochen, zweytausend sechs hundert drey und sechszig.

Exempel zur Uebung.

4736	18534	70085
8975	2619	3608
3897	1487	5307
9539	367	80
27147	23007	235
		79315

Dritter Abschnitt.

Von der Vermehrung in ungenannten Zahlen durch die Multiplikation.

§. 17.

Multipliciren, heißt nichts anders, als eine gegebene Zahl etlichemal zu sich selbst addiren, oder eine gegebene Zahl so oft addiren, als eine andere Zahl Einheiten enthält.

§. 18.

Diejenige Zahl, mit welcher die Vermehrung vorgenommen wird, oder welche multiplicirt werden soll, wird Multiplicandus, die Zahl aber, welche anzeigt, wie oft eine gegebene Zahl multiplicirt werden soll, der Mul-

tipli-

tiplicator; diejenige Zahl hingegen, welches heraus kommet, wenn die Multiplication verrichtet worden ist, das Produkt genannt.

Anmerkung.

Die beyden Zahlen, mit welchen die Multiplikation vorgenommen wird, haben außer ihren besondern Namen auch noch einen gemeinschaftlichen Namen; und werden Factores genannt.

§. 19.

Alle Producte zu finden, die heraus kommen, wenn man zwo Zahlen, deren jede mit einer Ziffer geschrieben wird, durcheinander zu multipliciren, oder das sogenannte Einmal Eins zu verfertigen.

Auflößung. Man zeichne sich

1) ein Viereck, das heißt, eine Figur, deren vier Seiten gleich lang sind.

2) eine jede von diesen Seiten theile man in 9 gleich große Theile, und ziehe durch diese Theilungspunkte gerade Linien.

3) in die oberste 9 Fächer, wie auch in die 9 erste Fächer zur linken Hand schreibe man die Ziffern von 1 bis 9 in ihrer natürlichen Ordnung.

4) addire man jede solcher Ziffern zu sich selbst, so hat man ihr Doppeltes, und zu ihrem Doppelten, so hat man ihr Dreyfaches,

und

und zu ihrem Dreyfachen, so hat man ihr Vierfaches u. s. w. welches man bis auf das Neunfache fortsetzen kann, so ist das Einmal Eins fertig.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 20.

Eine zusammengesetzte Ziffer mit einer einfachen zu multipliciren.

Auflößung.

1) Man setze den Multiplicator unter die Einheiten des Multiplicandus; darauf ziehe man einen Querstrich darunter.

2) multiplicire man die Einheiten des Multiplicandus durch den Multiplicator. Kommt aber in einem Produkt eine Ziffer einer höhern Ordnung vor, das heißt; übersteigt das Produkt die Ziffer 9, und müßte folglich daßelbe mit zweyen Ziffern geschrieben werden, so schreibe man

3) nur die hintere Ziffer gegen der rechten Hand in die Reihe der Einheiten, die erstere

stere Ziffer hingegen gegen die linke Hand zu behalten man im Sinn oder in mente, und wenn man

4) die Zehner des Multiplicandus durch den Multiplicator multiplicirt hat, so addire man die im Sinn behaltene Ziffer des vorigen Produkts dazu. Eben so verfährt man auch, wenn das neue Produkt der Zehner die Ziffer 9 übersteigt, bey der folgenden Ordnung der Hunderte, Tausende u. s. w.

Zum Exempel.

Es sey der gegebene Multiplicandus 352, und der Multiplicator 3

$$\begin{array}{r} 352 \\ 3 \\ \hline 1056 \end{array}$$

das unter dem Strich gesetzte Produkt ist hier also gefunden worden: 3 mal 2 ist 6, alsdenn 3 mal 5 ist 15, von diesem Produkt wird die 5 in die Stelle der Zehner gesetzt, die 1 aber im Gedächtniß oder im Sinne behalten. Hierauf sagt man 3 mal 3 ist 9, wozu die im Sinne behaltene 1 addirt wird, ist 10, welche Zahl, weil keine höhere Ziffer im Multiplicandus mehr übrig ist, ganz hingeschrieben wird.

Exempel zur Uebung.

84325	56214	378954
7	8	9
590275	449712	3410586

§. 21.

Zwey Zahlen ineinander zu multipliciren, wenn beyde durch zusammengesetzte Ziffern ausgedrückt sind.

Auflößung. Man suche

1) das Produkt aus der Ziffer der niedrigsten Ordnung des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus, und schreibe solches nach dem vorigen §. unter den Querstrich.

2) schreibe man das Produkt aus der Ziffer der nächst höhern Ordnung des Multiplicators in den ganzen Multiplicandus unter das erste Produkt so, daß die niedrigste Ziffer dieses Produkts gerade unter die andere Ziffer des Multiplicators, daraus es entstanden ist, komme; und eben so verfahre man mit den Produkten aus den Ziffern der folgenden höhern Ordnung. Endlich

3) addire man alle die gefundenen Produkte, so giebt die Summe das gesuchte ganze Produkt.

Zum Exempel.

	5821
	235
	29105
	17463
	11642
	1367935

Das unter den untern Strich gesetzte Product ist also gefunden worden. Das Product aus 5 in den Multiplicandus 5821 ist 29105, welches zuerst unter den obern Strich geschrieben worden. Das Product aus 3 in den Multiplicandus ist 17463, welches ebenfalls unter den Strich geschrieben worden, aber so, daß die 3 als die niedrigste Ziffer unter den Zehner des Multiplicators 3 gekommen, weil man eigentlich, statt 3 mal 1 ist 3, hätte sagen sollen 30 mal 1 ist 30, daher die Stelle der Einer leer bleiben müßen. Eben so ist das Product aus der 2 in den Multiplicandus nemlich 11642 so geschrieben worden, daß die 2 unter die 6 in die Stelle der Hunderte gekommen, weil man eigentlich hätte sagen sollen 200 mal 1 ist 200 u. s. w. Die Summe aus diesen dreyen einzelnen Producten aber, nemlich 1367935 ist das gesuchte ganze Product.

Exempel zur Uebung.

75384	12345
987	6789
527688	111105
603072	98760
678456	86415
74404008	74070
	83810205

§. 22.

Wenn einer von den beyden Factoren, oder auch beyde hinter sich Nullen haben, wie wird die Multiplication verrichtet?

Auflößung.

Hat nur einer von den Factoren, eine oder mehrere Nullen hinter sich, so multiplicire man

1) die ganze Zahlen in einander nach den §. 19. und 20. und zu dem Product setze man so viel Nullen als der eine von den Factoren Nullen hat.

2. Haben aber beyde Factoren hinter sich eine oder mehrere Nullen, so addire man

3) wenn man vorhero das Product von den ganzen Zahlen gefunden, so viel Nullen zu den gefundenen Product, als die beyde Factoren Nullen haben, so ist dieser Aufgabe ein Genüge geschehen.

Zum

Zum Exempel.

57300	5367
22	35000
1146	26835
1146	16101
1260600	187845000

§. 23.

Es kann auch öfters der Fall eintretten, daß entweder eine oder auch mehrere Nullen zwischen dem Multiplicator stehen; und die Multiplication wird alsdenn mit den Zahlen vorgenommen, wie gewöhnlich. Trift es sich, daß eine Nulle an der Stelle der Zehner steht, so multiplicire man, wenn man mit den Einern den Multiplicandus multiplicirt hat, mit den Hunderten, und rücke von den Einern um zwey Nullen hinein. Befinden sich aber nicht nur in der Stelle der Zehner, sondern auch noch in der Hunderten Nullen, so multiplicire man zuerst mit den Einern, alsdenn mit den Tausenden, und setze das neue Product der Tausenden um drey Stellen weiter von den Einern des ersten Products zurück. u. s. w.

Vierter Abschnitt.

Von der Verminderung in ungenannten Zahlen durch die Subtraction.

§. 24.

Subtrahiren heißt, von einer Zahl eine andere gegebene Zahl einmal wegnehmen. Von den beyden gegebenen Zahlen heißt diejenige, von der die Subtraction geschehen soll, oder von welcher man abziehen soll, die größere Zahl, hingegen die andere, mit welcher die Subtraction verrichtet wird, oder welche von der größern abgezogen werden soll, die kleinere Zahl. Diejenige Zahl aber, welche übrig bleibt, nennt man den Rest, die Differenz, oder auch den Unterschied.

§. 25.

Es sind zwey ungleiche Zahlen gegeben, man soll die kleinere von der größern abziehen.

Auflößung. Man schreibe

1) die kleinere Zahl unter die größere, so, daß die Einer der einen unter die Einer der andern, Zehner unter Zehner, Hunderte

unter

unter Hunderte u. s. w. wie bey der Addition gelehrt worden, zu stehen kommen. Ist

2) in der kleinern Zahl jede einfache Ziffer kleiner, als die ober ihr stehende: so zehle man in Gedanken die kleinere von der größern zurück, und setze, was übrig bleibt, unter den unter die beyden Zahlen gemachten Querstrich: als

	789
	323
Rest	466

dieses wird ausgesprochen: nachdem man bey der rechten Hand anfangt, 3 von 9 bleibt 6: diese 6 schreibe man unter die Einer unter den Querstrich; alsdenn ziehe man die Zehner ab, und sage 2 von 8 bleibt 6, und schreibe diese 6 in die Reihe der Zehner. Endlich sage man 3 von 7 bleibt 4 und hat man diese 4 in die Reihe der Hunderte geschrieben, so hat man 466 als den gesuchten Rest.

Exempel zur Uebung.

	56078		1789
	1003		1487
Rest	55075	Rest	302

§. 26.

Auf den Fall, der nur gar zu oft sich ereignet, daß einige unter den Ziffern der kleineren Zahl größer, als die darüber stehen-

 der

der größern Zahl sind, geschiehet die Subtraction nach folgender Regel:

Es ist in dem ersten Abschnitt §. 7. deutlich erkläret worden; daß, wenn eine Reihe Ziffern neben einander stehen, diejenigen Ziffer von der rechten gegen die linke Hand immer zehnmal mehr bedeute, als in der nächst vorhergehenden Stelle; hieraus entsteht folgende Regel;

Wenn die obere Zahl kleiner als die untere ist, so nehme man von der nächstfolgenden zehn hinweg, addire hiezu diejenige Zahl von der die Subtraction geschehen soll.

Zum Exempel.

Man soll 38 von 64 abziehen.

Nachdem man die Zahlen gehörigermaßen geschrieben.

$$\begin{array}{r} 64 \\ 38 \\ \hline 26 \end{array} \text{ Rest}$$

so sage man 8 von 4 kann nicht abgezogen werden, um aber doch die Subtraction nach Verlangen bewerkstelligen zu können, so nehme man von der nächstfolgenden 6, eins hinweg; und oberhalb der Ziffer 6 mache man einen Punkt als $\dot{6}$; und weil diese 1 in Ansehung der Einer zehnmal mehr bedeutet, so

addire

addire man hiezu 4 und sage alsdenn 8 von 14 bleiben 6 diese 6 schreibe man unter die Einer, und spreche man weiter 3 von 5, denn weil man von 6 Eins entlehnt oder geborgt hat, so ist diese Ziffer um eins weniger, bleiben 2 diese 2 schreibe man neben die vorhergefundene Ziffer 6, so ist 26 der ganze gesuchte Rest.

Exempel zur Uebung.

	73421		8956781
	26738		7968995
Rest	46683	Rest -	987786

§. 27.

Es kann auch bey dem sogenannten Borgen geschehen, daß die Ziffer, wovon man 1 borgen soll, die 0 ist, und läßt sich davon nichts abnehmen. Folgt auf die 0 eine Ziffer, so verfahre man nach den vorhergehenden §. hievon entlehnt man 1, so hat man 10 statt der 0. Von dieser Claße kann man zur folgenden Classe wieder 1 borgen, so bleiben 9, wie aus folgenden Exempeln:

10 10	10 10
730504	5082104
364738	1895676
365766	3186428

Hieraus ergiebt sich folgende Regel:

Wenn man über eine 0 weg borget, so ist es eben so viel, als wenn man die 0 in 9 verwandelt hätte.

§. 28.

Wenn mehrere Nullen nach einander folgen, so muß man von derjenigen Ziffer, die nach der letzten Null folgt, 1 borgen, so bekommt man 10 statt dieser 0; von diesen 10 borgt man wieder 1 weg in die nächst niedrige Classe, so wird diese 0 wieder 10, und in jener bleiben 9 u. s. w. Hieraus folgt denn die Regel:

Wenn man über mehrere nacheinander folgende Nullen wegborget, so ist es eben so viel, als ob man jede dieser Nullen in 9 verwandelt hätte.

Zum Exempel.

30076004	800005002
18598375	687359768
11477629	112645234

Anmerkung.

Um sich zu überzeugen, daß man die Rechnung richtig gerechnet habe, so addire man den Rest zu der kleinern gegebenen Zahl; so

muß

muß die Summe der größern gegebenen gleich seyn.

Fünfter Abschnitt.

Von der Verminderung in ungenannten Zahlen durch die Division.

§. 29.

Dividiren heißt von einer gegebenen Zahl eine andere gegebene so vielmal wegnehmen, oder abziehen, als angeht. Diejenige Zahl aber, von welcher eine andere auf diese Weise abgezogen werden soll, wird der **Dividendus**, diejenige Zahl aber, welche abgezogen werden soll, der **Divisor**, und die gesuchte Zahl, welche angiebt, wie oftmals die Subtraction vorgenommen worden ist, oder wie vielmal der Divisor in dem Dividendus enthalten ist, wird der **Quotus** oder **Quotient** genannt.

§. 30.

Eine Zahl durch eine andere zu dividiren.

Auflößung.

Bestehet der Divisor nur aus einer Ziffer, so suche man

1) wie vielmal der Divisor in der ersten, oder wenn diese kleiner ist, in den beyden ersten

sten Ziffern des Dividendus von der linken zur rechten Hand enthalten ist; das heißt; man suche oder schlage im Einmal-Eins eine Zahl auf, welche mit dem Divisor multiplicirt, ein Product giebt, welches so groß, oder nächst kleiner ist, als die erste, oder die beyden ersten Ziffern des Dividendus.

2) Diese Zahl schreibe man als den ersten Theil des Quotienten hinter einen Strich neben den Dividendus, das Product hingegen unter die erste, oder die ersten beyden Ziffern des Dividendus.

3) Ziehe man das Product von dem Dividendus ab. Hierauf schreibe man

4) die Ziffer der nächst niedrigern Ordnung im Dividendus neben den Rest, wenn einer vorhanden ist, oder, (wie man zu sprechen pflegt,) man hole die Ziffer der nächstniedern Ordnung herunter. Alsdenn suche man

5) wie viel vielmal der Divisor in dieser Zahl enthalten sey; schreibe man

6) den neuen Quotienten neben den vorigen Quotienten, und das Product setze man

7) unter die neue Zahl, und ziehe solches davon ab. u. s. w.

Alle einzelne Theile des Quotienten hinter dem Strich zusammen genommen geben den gesuchten Quotienten.

Zum Exempel.

```
2 | 784 | 392
     6
    ---
    18
    18
    ---
    04
     4
    ---
     0
```

Der Quotient 392 zeigt an, daß die 2 in 784 dreyhundert zwey und neunzigmal enthalten sey und solches auf folgende Art gefunden worden ist. Denn nach dem Einmal-Eins ist 2 mal 3 sechs, welches nächst kleiner ist als 7. Diese 3 ist der erste Theil des Quotienten hinter den Strich, das Product 6 aus der 2 in den Divisor aber unter 7 geschrieben, und von derselben subtrahirt worden. Neben den Rest 1 setze man die folgende Ziffer des Dividendus nemlich 8, welche mit dem Rest 1 zusammen 18 ausmacht. In dieser 18 ist der Divisor 9 mal enthalten, denn 2 mal 9 ist 18 folglich ist 9 hinter den Strich neben die 3, das Product 18 aber unter die 18 zu setzen. Weil nun kein Rest bleibet, so hole man die 4 herunter, in welcher der Divisor 2 mal enthalten ist, folglich schreibe man 2 hinter den Strich, und das Product aus 2 in den Divisor nemlich 4 unter die Zahl 4 und subtrahire selbi-

ge.

ge. Da nun nichts übrig bleibet, so ist folglich der ganze Quotient 392.

Exempel zur Uebung.

```
3 | 141 | 47
    12
   ---
    21
    21
   ---
     0
```

```
3 | 1521 | 507
    15
   ---
    021
     21
    ---
      0
```

§. 31.

Eine Zahl durch eine andere zu dividiren.

Auflößung.

Bestehet der Divisor aus mehrern Ziffern, so suche man

1) wie vielmal die erste Ziffer des Divisors zur linken in der ersten oder den beyden ersten Ziffern des Dividendus enthalten sey

2) nehme man an, weil diese erste Ziffer des Divisors die größte in derselben ist, daß der ganze Divisor eben so vielmal in den ersten Ziffern des Dividendus enthalten sey, man schreibe dahero solche gefundene Zahl hinter den Strich

2) multiplicire man diesen gefundenen ersten Theil des Quotienten mit dem ganzen Divisor,

4) das

4) das Product subtrahire man von den ersten Ziffern des Dividendus.

5) Neben den Rest schreibe man die nächst folgende Zahl des Dividendus, und verfahre eben so wie nach N. 1. 2. 3 und 4. gelehrt worden.

Zum Exempel.

```
24 | 834432 | 34768
      72
     ---
     114
      96
     ---
     184
     168
     ---
      163
      144
      ---
       192
       192
       ---
       000
```

Der Quotient 34768 wird auf folgende Art gefunden, nemlich 2 als die erste Ziffer des Divisors ist in 8 dreymal enthalten, folglich ist 3 hinter den Strich, und das Product aus 3 in 24 nemlich 72 unter die beyden ersten Ziffern des Dividendus nemlich 83 geschrieben und subtrahirt worden. Neben dem Rest ist die folgende Ziffer des Dividendus, nemlich 4 gesetzt worden. Weil nun

nun 2 in 11 viermal enthalten, so ist 4 der zwente Theil des Quotienten; das Product aus 4 in 24 nemlich 96 ist alsdenn subtrahirt worden u. s. w.

Exempel zur Uebung.

```
37 | 694120 | 18760
     37
     ---
     324
     296
     ---
      281
      259
      ---
       222
       222
       ---
       ..00

287 | 354158 | 1234
      287
      ---
       671
       574
       ---
        975
        861
        ---
        1148
        1148
        ----
        0000
```

```
584 | 294608173 | 504466
      2920
    ------
      260.8
      233 6
     -------
       27 21
       23 36
      -------
        3 85 7
        3 50 4
       --------
          35 33
          35 04
        --------
         .00(29)
```

Anmerkung.

Bleibet nach der letzten Subtraction noch ein Rest, so, daß also der Divisor in den Dividendus nicht gänzlich aufgehet, so wird der Rest, (wie aus obigem Exempel ersichtlich) in eine Clammer eingeschlossen.

§. 32.

Haben sowohl der Dividendus als auch der Divisor am Ende Nullen, so geschiehet die Division mit den ganzen Ziffern, wie in den beyden vorhergehenden Paragraphen gezeigt worden ist, und die Nullen sowohl im Dividendus als im Divisor, wenn dieselben gleich viel Nullen haben, werden am Ende weggestrichen. Sind aber nur im Divisor eine

eine oder mehrere Nullen befindlich, so streicht man im Dividendus so viel Zahlen weg, als der Divisor Nullen enthält; auch in beyden Fällen setzt man die weggestrichene Nullen oder ausgelassene Ziffern des Dividendus mit zu dem Rest.

Zum Exempel.

```
4ø | 736ø | 184
      4
     33
     32
      16
```

```
5øø | 85øø | 17
       5
      35
```

```
3øø | 48 | 25 | 16
      3
      18
      18
      ..(25)
```

```
6øø | 738 (71 | 123
        6
        13
        12
        18
        18
        ..(71)
```

§. 33.

Wenn man den herauskommenden Quotienten nach verrichteter Division mit dem Divisor multiplicirt; und zu dem herausgekommenen Product den Rest, wenn einer vorhanden ist, addirt, so giebt das Product den Dividendus.

Sechs-

Sechster Abschnitt.

Von den Brüchen, und von den Rechnungsarten mit den Brüchen.

§. 34.

Wenn man ein gewisses Ganze in etliche gleich grosse Theile abtheilt, so nennt man einen oder mehrere dieser Theile eines Ganzen einen Bruch.

§. 35.

Diejenige Zahl eines Bruches, welche anzeigt, in wie viel gleichgroße Theile ein Ganzes abgetheilt worden ist, heißt der Nenner: diejenige Zahl hingegen, welche bestimmt, wie viel gleich große Theile man von einem Ganzen genommen habe, der Zähler. Um einen Bruch auszudrücken, wird der Zähler oberhalb und der Nenner unter diesen, aber durch einen Querstrich abgesondert, geschrieben:

Zum Exempel.

$\frac{2}{3}$ wird ausgesprochen $\frac{\text{Zwey}}{\text{Drittel}}$

2. ist der Zähler, und 3 der Nenner.

§. 36.

Ein sogenannter eigentlicher oder ächter Bruch ist derjenige, welcher nur aus

 ein

ein oder etlichen gleich großen Theilen eines Ganzen besteht, und niemals ein Ganzes, sondern immer weniger gilt. Ein uneigentlicher oder unächter Bruch aber ist ein solcher, welcher entweder mehr, oder auch so viel als ein Ganzes gilt; oder dessen Zähler entweder größer als der Nenner, oder eben so groß als der Nenner ist.

§. 37.

Außer diesen Benennungen theilt man die Brüche auch noch ein, 1) in reine und 2) in gemischte Brüche. Reine Brüche sind diejenige, welche keine ganze Zahlen vor sich haben; gemischte hingegen solche, die ganzen Zahlen angehängt sind, oder die ganze Zahlen vor sich haben.

§. 38.

Ueberdem giebt es auch noch Fälle; daß bey den Brüchen die Zähler und Nenner aus ganzen Zahlen, und auch aus gebrochenen Zahlen bestehen können. Im ersten Fall heißen die Brüche einfache Brüche, im andern hingegen doppelte oder gebrochene Brüche.

§. 39.

Diejenige Brüche, deren Nenner ein Zehne, oder ein Product aus Zehen ist, nennt man Decimalbrüche.

§. 40.

§. 40.

Einen gegebenen Bruch in einen andern verwandlen, daß er den nämlichen Werth behalte geschieht auf viererley Arten, nemlich:

1) wenn man zwey oder mehrere Brüche unter einerley Benennung bringt; oder dieselbe so verwandelt, daß sie alle ohne Veränderung ihres Werths gleiche Nenner bekommen.

2) Durch das Abbreviren, oder durch das Aufheben der Brüche, wenn man einen Bruch ohne Veränderung seines Werths durch einen kleinern Zähler und Nenner ausdrückt.

3) Durch die Resolution der Brüche, wenn man einen Bruch ohne Veränderung seines Werths in einen andern verwandelt, dessen Nenner gegeben ist. Und endlich

4) Durch das Einrichten gemischter Brüche, wenn man dieselbe in unächte reine Brüche verwandelt.

§. 41.

Es sind zwey oder auch mehrere Brüche gegeben, welche verschiedene Nenner haben, man soll diese Brüche so verändern, daß alle gleiche Nenner bekommen, ohne daß die Größe der Brüche selbst geändert wird, oder, (wie man gewöhnlich zu sagen pflegt,) man

soll die Brüche unter einerley Benennung bringen.

Auflösung.

Sind nur zwey Brüche gegeben, so multiplicire man eines jeden Zähler und Nenner mit des andern Nenner: z. E. es sollen, die Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{4}$ unter einerley Benennung gebracht werden; so multiplicire man des ersten Bruchs Zähler und Nenner aber durch 6, so bekommt man die Brüche $\frac{18}{24}$ und $\frac{20}{24}$ welche gleiche Nenner haben, und eben so viel gelten, als $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{4}$.

Sind mehrere Brüche gegeben; so multiplicire man

1) eines jeden Zähler und Nenner mit dem Product aus allen Nennern der übrigen Brüche. z. E. Es sollen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{2}{5}$ unter gleiche Benennung gebracht werden; so multiplicire man des ersten Bruchs Zähler und Nenner durch 15, drs andern Bruchs Zähler und Nenner durch 10 des dritten Bruchs Zähler und Nenner durch 6. hierdurch erhält man $\frac{15}{30}$ $\frac{20}{30}$ $\frac{12}{30}$ welche Brüche gleiche Nenner haben, und eben so groß sind als die gegebenen. Oder

2) man multiplicire alle Nenner der gegebenen Brüche in einander: so giebt das Produkt den gemeinschaftlichen Nenner. In diesen gemeinschaftlichen Nenner dividire man

man mit allen Nennern der gegebenen Brüche, die herausgekommene Quotienten aber multiplicire man mit allen Zählern der gegebenen Brüche. Die sich ergebende Producte sind die Zähler zu den Brüchen, welche alle den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner haben, und den gegebenen Brüchen gleich sind.

Zum Exempel.

Es sollen die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{7}$ unter gleiche Benennung gebracht werden, so geschiehet dieses auf folgende Weise:

2. der Nenner des ersten Bruchs
3. — — des andern — —

6. Product des ersten in andern
5. der Nenner des dritten Bruchs.

30. Produkt des Nenners des dritten Bruchs in das Produkt der zwey ersten Brüche
7. Nenner des vierten Bruchs

210. Produkt aller vier Nenner oder der gemeinschaftliche Nenner

$\frac{1}{2}$	105	—	—	—	105
$\frac{2}{3}$	70	—	—	—	140
$\frac{3}{5}$	42	—	—	—	126
$\frac{2}{7}$	30	—	—	—	60

folglich sind $\frac{105}{210}$ $\frac{140}{210}$ $\frac{126}{210}$ und $\frac{60}{210}$ diejenige Brüche welche statt der gegebenen Brüche gelten können, und welche alle gleiche Nenner haben.

§. 42

Es läßt sich aber diese Rechnung zuweilen abkürzen, wenn nemlich unter den gegebenen Brüche die Nenner so beschaffen sind, daß der größte Nenner durch alle andere kleinere Nenner ohne Rest kann dividirt werden. In diesem Fall nimmt man den größten Nenner für den gemeinschaftlichen Nenner an; dividirt mit den Nennern der übrigen gegebenen Brüche darein, so sind sämtliche Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht.

Zum Exempel.

Es seyn die Brüche $\frac{3}{7}$, $\frac{9}{14}$ $\frac{13}{28}$ gegeben. Bey genauer Uebersicht dieser Brüche findet man sogleich, daß der Nenner im dritten Bruche 28 auch durch die übrige Nenner getheilt werden kann. Mithin wird die Rechnung, wenn man 28 für den gemeinschaftlichen Nenner annimmt, wie im vorhergehenden §. angezeigt worden, verrichtet, und auf folgende Weise gerechnet.

			(28.)
$\frac{3}{7}$	4	— — —	12
$\frac{9}{14}$	2	— — —	18
$\frac{13}{28}$	1	— — —	13

folglich sind die Brüche $\frac{12}{28}$ $\frac{18}{28}$ und $\frac{13}{28}$ den gegebenen Brüchen gleich; und haben einen gemeinschaftlichen Nenner.

§. 43.

Einen gegebenen Bruch einfacher auszudrücken, oder, wie man gemeiniglich zu sagen pflegt, einen Bruch aufheben, oder abbreviren.

Auflösung.

Man suche eine Zahl, womit sich sowohl der Zähler als der Nenner des Bruchs theilen läßt, ohne daß ein Rest bleibet. Z. E. Es soll der Bruch $\frac{36}{48}$ aufgehoben werden; so ist es augenfällig, daß sich sowohl der Zähler als auch der Nenner mit 12 theilen läßt. Dividirt man nun mit 12 in 36 als den Zähler, und in 48 als den Nenner, so entsteht ein Bruch $\frac{3}{4}$, welcher kürzer ausgedrückt ist, aber doch eben so groß als der gegebene Bruch $\frac{36}{48}$ ist.

Anmerkung.

Besteht der Zähler und Nenner, oder auch nur einer von beyden aus ungeraden Zahlen, so muß die Zahl, womit der Bruch aufgehoben werden soll, auch eine ungerade Zahl seyn: sind aber der Zähler und Nenner gerade Zahlen, so können dieselbe sowohl durch gerade als ungerade Zahlen aufgehoben werden.

§. 44.

Einen Bruch in einen andern Bruch verwandeln, daß er den nemlichen

Werth behalte, und zwar durch das Resolviren oder durch die Resolution.

Auflößung.

1) Man multiplicire den Zähler des gegebenen Bruches mit dem gegebenen Nenner und

2) dividire man das Product durch den Nenner des Bruches, so giebt der Quotient den Zähler eines Bruches, welcher den gegebenen Nenner hat, und dem gegebenen Bruch gleich ist.

Zum Exempel.

Es soll der Bruch $\frac{3}{4}$ in einen Bruch verwandelt werden, dessen Nenner 16 ist so multiplicire man den Zähler 3 mit dem gegebenen Nenner 16 giebt das Product 48 mit dem Nenner 4 dieses Product dividirt, giebt 12 zum Quotienten: folglich $\frac{12}{16}$ eben so viel als $\frac{3}{4}$.

§. 45.

Es ist ein gemischter Bruch gegeben, man soll denselben einrichten.

Auflösung.

1) Man multiplicire die ganze Zahl, welche denselben angehängt ist, mit dem Nenner des Bruchs; und

2) zu dem Product addire man den Zähler dieses Bruches; so ist

3) die Summe der Zähler zu einem unächten reinen Brauche, welcher den Nenner des gegebenen Bruches zu seinem Nenner hat, und dem gegebenen gemischten Bruch gleich ist.

Zum Exempel.

Es soll der Bruch $3\frac{1}{2}$ eingerichtet werden; so multiplicire man 3 mit dem Nenner 2 hiezu den Zähler 1 addirt, so ist die Summe 7 der Zähler eines Bruches, welcher 2 zum Nenner hat, folglich $\frac{7}{2}$ ist: und dieser Bruch gilt eben so viel als $3\frac{1}{2}$.

§. 46.

Es sind zwey oder mehrere Brüche gegeben, man soll dieselben zusammen addiren.

Auflößung.

Hierbey sind zwey Fälle zu betrachten: denn einmal haben die Brüche einerley Nenner, oder aber zweytens haben sie verschiedene Nenner.

Im ersten Fall werden die Zähler aller gegebenen Brüche zusammen addirt, und die Summe wird zum Zähler eines Bruches gemacht, der den Nenner der gegebenen Brüche hat.

Zum Exempel.

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1.$
$\frac{7}{8} + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{16}{8} = 2.$
$\frac{4}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{9}{7} = 1\frac{2}{7}.$

Im zweyten Fall, wenn die Brüche verschiedene Nenner haben, so bringe man solche nach §. 41.

1) unter einerley Benennung,

2) addire man die neuen Zähler derselben, und mache diese Summe zum Zähler eines Bruches, welche den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner hat.

Zum Exempel.

$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ gegebene Brüche.
$\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$ reducirte Brüche.
$\frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$ Summe der Brüche.

$\frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ gegebene Brüche.
$\frac{24}{40} + \frac{20}{40} + \frac{30}{40}$ reducirte Brüche.
$\frac{74}{40} = 1\frac{34}{40} = 1\frac{17}{20}$ Summe der Brüche.

$\frac{1}{3} + \frac{5}{7} + \frac{3}{5} + \frac{1}{8}$ gegebene Brüche.
$\frac{280}{840} + \frac{600}{840} + \frac{504}{840} + \frac{105}{840}$ redutirte Brüche.
$\frac{1489}{840} = 1\frac{649}{840} =$ Summe der Brüche.

§. 47.

Einen gegebenen Bruch von einem andern gegebenen größern zu subtrahiren.

Auflößung.

Es giebt wieder vier Fälle. **Erster Fall.** Haben die Brüche gleiche Nenner, so ziehe man den kleinen Zähler von den größern ab, und der Rest ist alsdenn der Zähler eines Bruches, welcher den Nenner der gegebenen Brüche hat.

Zum Exempel.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Rest.
$\frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$ Rest.
$\frac{18}{37} - \frac{5}{37} = \frac{13}{37}$ Rest.

Zweyter Fall. Haben die gegebenen Brüche verschiedene Nenner, so bringe man solche nach §. 41. unter einerley Benennung; alsdenn ziehe man den neuen Zähler des größeren Bruches von dem kleiueren ab; und den Rest nehme man zum Zähler eines Bruchs, welcher den gefundenen gemeinschaftlichen Nenner hat.

Zum Exempel.

Gegebene Brüche.	$\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{7}$
Reducirte Brüche.	$\frac{15}{20} - \frac{8}{20}$	$\frac{7}{21} - \frac{6}{21}$
Rest der Brüche.	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{21}$

Dritter Fall. Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl subtrahirt werden, so verwandle man die ganze Zahl in einen Bruch, welche den Nenner des gegebenen Bruches hat.

Zum

Zum Exempel.

Es soll $\frac{2}{3}$ von 4 subtrahirt werden, so wird 4 in den Bruch $\frac{12}{3}$ verwandelt, alsdenn 2 von 12 abgezogen, so ist der gesuchte Rest $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Vierter Fall. Sollen gemischte Brüche von einander subtrahirt werden, so verwandle man 1) beyde in unächte Brüche, und subtrahire man solche alsdenn: oder 2) ziehe man den Bruch, welcher der ganzen Zahl, die subtrahirt werden soll, angehängt ist vor dem Bruche der größern Zahl, und hernach die kleinere ganze Zahl von der größern ab; auf den Fall aber, daß der Bruch der kleinern Zahl größer ist als derjenigen der größern, so borge man von der größern ganzen Zahl 1, verwandle solche in einen Bruch, welcher den Nenner des kleineren Bruchs hat; alsdenn addire man zu diesem den kleinern Bruch, und endlich subtrahire man die Brüche und ganze Zahlen.

Zum Exempel.

Es soll $3\frac{1}{3}$ von $7\frac{2}{3}$ abgezogen werden, so ist der gesuchte Rest $4\frac{1}{3}$. Es soll ferner $2\frac{1}{4}$ von $5\frac{1}{2}$ subtrahirt werden: so verwandle man beyde zuerst in die unächte Brüche $\frac{9}{4}$ und $\frac{11}{2}$, alsdenn bringe man die Brüche unter gleiche Nenner $\frac{9}{4}$ und $\frac{22}{4}$ nun subtrahire man die

Zähler von einander, so ist der Rest $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$. Noch weiters soll $4\frac{2}{3}$ von $6\frac{1}{2}$ subtrahirt werden, und zwar die Brüche und ganze Zahlen allein, so borge man, weil der Bruch $\frac{2}{3}$ größer ist als $\frac{1}{2}$ zuerst 1 von 6; verwandle dieses in den Bruch $\frac{2}{2}$, und addire $\frac{1}{2}$ dazu, so bekommt $\frac{3}{2}$ worauf $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{2}$, sobald diese beyde Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht worden sind, nemlich $\frac{4}{6}$ und $\frac{9}{6}$ subtrahirt werden können, wo alsdenn die Differenz der beyden Brüche $\frac{5}{6}$ zu der Differenz der ganzen Zahlen 4 und 5, welche 1 ist: gesetzt wird: mithin ist die gesuchte Differenz $1\frac{5}{6}$.

§. 48.

Einen Bruch mit einem andern Bruch multipliciren heißt nichts anders, als den ersten Bruch in so viel Theile theilen, als des andern Bruches Nenner Einheiten hat; und von diesen Theilen so viel nehmen, als des andern Bruches Zähler hat. Ersteres geschieht durch die Multiplication der Nenner, das letztere hingegen durch die Multiplication der Zähler: folglich; wenn man einen andern Bruch multipliciren soll, so darf man nur den Zähler des einen Bruches mit dem Nenner des andern Bruches multipliciren, so giebt alsdenn das erste Product den Zähler, das andere hingegen den Nenner eines Bruches, welches dem gesuchten Product beyder Brüche gleich ist.

Zum

Zum Exempel.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$
$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$
$\frac{2}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}.$

§. 49.

Um sich dieser Auflößung vergewissert zu halten; so dividire man das Multiplicandum durch den Nenner des Multiplicators, und den herausgekommenen Quotienten multiplicire man mit dem Zähler des Multiplicators. Also $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times (\frac{2}{3} : 4) \times 3 = \frac{2}{3 \times 4} \times 2 = \frac{2 \times 3}{3 \times 4}$

§. 50.

Auf eine andere Art die Brüche mit einander zu multipliciren; so dividire man kreuzweise des Multiplicandi Zähler durch des Multiplicators Nenner, und jenen Nenner durch diesen Zähler: so ist ersterer Quotient der Zähler, und letzterer der Nenner des gesuchten Quotienten.

Zum Exempel.

$\frac{6}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{6 : 3}{8 : 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$

§. 51.

Eben diese Aufgabe kann auch noch auf folgende Art aufgelößt werden: man multiplicire den Zähler des Multiplicandi in den Multiplicator, und lasse den Nenner ungeändert.

Zum Exempel.

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{\frac{12}{7}}{5}; \quad \frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{\frac{21}{8}}{5}.$$

§. 52.

Noch anders

Man dividire des Multiplicandi Nenner mit dem Multiplicator, und behalte den Zähler.

Zum Exempel.

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{\frac{4}{35}}{3}; \quad \frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{\frac{3}{40}}{7};$$

§. 53.

Soll ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden, so multiplicire man nur den Zähler des gegebenen Bruches mit der gegebenen ganzen Zahl. Das Product giebt den Zähler eines Bruches, welcher den Nenner des gegebenen Bruches hat, und das gesuchte Product ist.

Zum

Zum Exempel.

Es soll $\frac{3}{4}$ mit 2 multiplicirt werden, so ist das Product $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Oder $\frac{1}{3}$ mit 4 $= \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, oder $\frac{7}{12}$ mit $8 = \frac{56}{12} = 4\frac{2}{3}$.

§. 54.

Sollen gemischte Brüche mit einander multiplicirt werden, so verwandele man dieselbe zuerst in unächte Brüche, und multiplicire man solche alsdenn nach §. 46.

Zum Exempel.

Es sollen $3\frac{1}{2}$ und $4\frac{2}{7}$ mit einander multiplicirt werden, so verwandle man dieselbe nach §. 44. in unächte Brüche, nämlich $\frac{7}{2}$ und $\frac{30}{7}$, so ist das Product $\frac{210}{14}$ oder 13 oder $6\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{5}$ multiplieirt, giebt zum Product $\frac{60}{15} = 4$.

§. 55.

Einen gegebenen Bruch mit einem andern gegebenen Bruch zu dividiren.

Erste Auflösung.

Man multiplicire kreuzweise des Dividendi Zähler in des Divisors Nenner, und des Dividendi Nenner in des Divisors Zähler; so ist ersteres Product der Zehler, und letzteres der Nenner des gesuchten Bruches.

Oder

Oder man kehre den Divisor um, das heißt; man mache den Zehler desselben zum Nenner, und den Nenner zum Zehler; alsdenn multiplicire man denselben mit dem andern Bruch; so ist das gefundene Product der gesuchte Quotient.

Zum Exempel.

Es soll $\frac{2}{3}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden;

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}.$$

Zweyte Auflösung.

Man dividire den Zehler und Nenner des Dividendi, jenen durch den Zehler, und diesen durch den Nenner des Divisors: so ist jener Quotient der Zehler, und dieser der Nenner des gesuchten Bruches.

Zum Exempel.

$$\frac{21}{24} : \frac{3}{8} = \frac{21}{24} \times \frac{8}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

Dritte Auflösung.

Man dividire den Zehler des Dividendi durch den Divisor, und lasse den Nenner ungeändert.

Zum Exempel.

$$\frac{5}{8} : \frac{4}{9} = \frac{5}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{5 \times \frac{9}{4}}{8} = \frac{5 : \frac{4}{9}}{8}.$$

Vierte Auflößung.

Man multiplicire des Dividendi Nenner durch den Divisor, und laße den Zehler ungeändert.

Zum Exempel.

$$\frac{5}{8} : \frac{4}{9} = \frac{5}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{5}{8 : \frac{9}{4}} = \frac{5}{8 \times \frac{4}{9}}.$$

§. 56.

Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden; so multiplicire man nur den Nenner des Bruches mit der gegebenen Zahl, so giebt das Product den Nenner eines Bruches, welcher den Zähler des gegebenen Bruches hat, und der gesuchte Quotient ist.

Zum Exempel.

Es soll $\frac{3}{4}$ durch 2 dividirt werden; so ist der Quotient $\frac{3}{8}$.

$$\frac{7}{8} : 2 = \frac{7}{16}. \quad \frac{5}{6} : 5 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

§. 57.

Sollen gemischte Brüche dividirt werden, so verwandele man sie zu allererst nach §. 44. in unächte Brüche, und verfahre nach der im 54. §. gegebenen Anweisung.

Zum Exempel.

Es soll $3\frac{2}{5}$ durch $1\frac{3}{4}$ dividirt werden.

$3\frac{2}{5} : 1\frac{3}{4} = \frac{17}{5} : \frac{7}{4}$. oder

$\frac{17}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{68}{35} = 1\frac{33}{35}$. Quotient.

Oder: es soll $6\frac{2}{9}$: durch $\frac{5}{8}$ dividirt werden:

$6\frac{2}{9} : \frac{5}{8} = \frac{56}{9} \times \frac{8}{5} = \frac{448}{45} = 9\frac{43}{45}$

der gesuchte Quotient.

Anmerkung.

So viel von den Rechnungen mit unbenannten Zahlen. Ehe und bevor man die Rechnungen mit benannten Zahlen, wie auch die Lehre von den Verhältnißen und Proportionen gründlich einsehen will, muß man sich nachfolgende Resolvirungen der Münzen, Maase, und Gewichte wohl bekannt machen; als:

Münz.

60. Kreuzer machen einen Gulden.
15. Batzen, ebenfalls.
20. Groschen, desgleichen.
4. Kreuzer ist ein Batzen.
3. Kreuzer ein Groschen.
4. Pfennige ein Kreuzer.
8. Heller, desgleichen.
2. Heller ein Pfennig.

Abbrevirt.

60. Kr. ist 1. fl.
15. Baz. : 1. fl.
20. Gr. : 1. fl.
4. Kr. : 1. Batz.
3. Kr. : 1. Gr.
4. Pf. : 1. Kr.
8. hl. : 1. Kr.
2. hl. : 1. Pf.

Gewicht.

32. Loth ist ein Pfund. ℔.
8. Loth. : ein Vierling. Vr.
4. Vierling : ein ℔.
100. ℔. : ein Centner. Ctr.
1. Loth hat 4. Quint. Qt.

Silbergewicht.

1. Mark, Mr. hat $\frac{1}{2}$ ℔. oder 16. Loth. oder 8. Unzen.
1. Unz hat 2. Loth.
1. Loth hat 4. Quint.
1. Quint hat 4. Pfennige.
1. Pfennig hat 2. Häller.

Goldgewicht.

1. Mr. hat 24. Karat.
1. Karat ist 4. Gran.
1. Gran. 3. Grän.
3. Karat 2. Loth.
$67\frac{1}{4}$ gewichtige Ducaten: oder
70. Cronen Gewicht thun 1. Mr.

Apothecker-Gewicht.

1. Gran ist ein Gerstenkörnle schwer.
20. Gran ist Scrupel.
3. Scrupel ist 1. Drachma oder Quint.
8. Drachma ist 1. Unze.
12. Unzen thun 1. ℔.

Augsburger Getreidt Maaß.

1. Schaff hat 8. Metzen.
1. Metzen hat 4. Vierling.
1. Vierling hae 4. Viertele.
1. Viertele hat 4. kleine Mäßle.

Augsburger Getränk Maaß.

1. Eicht- oder Visier-Eymer hat 64 Maaß.
1. Schenk-Eymer hat 72. Maaß.
4. Maas ist ein Napf.
2. Maas ein Viertel.

1. Maaß hat 2. Seidlen.
1. Maaß hat 4. Quart oder Onärtle.
1. Seidle hat 2. Quärtle.

Feldmaaß.

1. Ruthe hat 10. Werkschuh.
1. Schuh hat 10. Zoll.
1. Zoll 10. Linien.
1. Linie 10. Scrupel.
1. Quadratruthe hat 10. Quadratschuh.
400. Quadratruthen, oder 40000. Quadratschuh hält 1. Tagwerk.
60000. Quadratschuh 1. Jauchert Feld oder Waldung.

Ellenmaaß.

1. Elle hat 16. Sechszehntheil.
4. Sechszehntheil ist ein Viertel.
8. Sechszehntheil ist ½ Ellen.
4. Viertel ist 1. Ellen.
2. Viertel ist ½ Ellen.

Vom Papier.

10. Rieß ist ein Ballen.
20. Buch ist ein Rieß.
25. Bogen ist ein Buch.

Von der Zeit.

365. Tage ist ein gemeines Jahr.
366. Tage ist ein Schaltjahr.
12. Monat machen ein Jahr.
52. Wochen machen ein Jahr.
7. Tage machen 1. Woche.
24. Stunden einen Tag.
60. Minuten eine Stunde.
60. Sekunden eine Minute.

Siebenter Abschnitt.

Von den Rechnungsarten in genannten Zahlen.

I.

Durch die Addition.

§. 68.

Die im zweyten Abschnitt abgehandelte Regeln gelten bey diesen Rechnungen ebenfalls, und ist zu denselben weiter nichs hinzu zu setzen, als daß die Zahlen, welche einerley Namen führen, ordentlich unter einander geschrieben werden müßen.

Zum Exempel.

Es sollen folgende Posten, die man sogleich gehörig untereinander setzen muß, nämlich

lich Gulden unter Gulden, Kreuzer unter Kreuzer, Pfennige unter Pfennige, addirt werden; als:

fl.	kr.	Pf.
22.	38.	2.
58.	44.	3.
139.	55.	1.
246.	26.	3.
fl. 467.	45. kr.	1. Pf.

Nachdem man die im vorigen Abschnitt vorgemerkte Resolvirung der Maaße, Münzen und Gewichte sich bekannt gemacht haben muß, so hat man die unter dem Querstrich gesetzte Summe auf folgende Art gefunden. Man hat zuerst alle Pfennige eben so, wie die unbenannten Zahlen, in eine Summe gebracht. Diese Summe war 9. Da nun diese schon Kreuzer, oder einige solche größere Einheiten, dereu jede aus 4. kleinern besteht, enthält, so dividirte man sie mit 4. Der Quotient 2 deutet an, wie viel Kreuzer, der Rest 1 aber, wie viel Pfennige über 2. Kreuzer in 9 Pfennigen enthalten seyen. Der Rest 1. wird folglich unter die Pfennige gesetzt, der Quotient 2. aber zu den Kreuzern addirt, deren Summe 165. betrug. Weil nun diese schon Gulden, oder wieder größere Einheiten, deren jede aus 60. kleinern besteht, enthält, so dividirte man mit 60. darein. Der Quotient 2. zeigte an, wie viel Gulden, der Rest 45. aber, wie viel Kreuzer

zer über 2. Gulden in 165. Kreuzer enthalten seyen. Man setzte daher den Rest 45. unter die Kreuzer, der Quotient 2. aber wurde zu den Gulden, deren Summe 467. ausmachte, addirt. Folglich beträgt die ganze Summe

fl. 467. 45. kr. 1. Pf.

Exempel zur Uebung.

Centr.	℔.	Loth.	Quint.
13.	89.	27.	3.
24.	91.	31.	1.
6.	77.	18.	2.
14.	53.	9.	1.
48.	10.	12.	3.
108. Ct.	23. ℔.	3. Lt.	2. Qt.

Viesiereymer.	Maas.	Quärtle.
12.	57.	3.
49.	43.	1.
8.	32.	3.
5.	19.	3.
20.	58.	2.
97. Eym.	20. Ms.	— Qrtle.

Schaff.	Metzen.	Viertele.
11.	7.	7.
23.	5.	3.
8.	1.	10.
43. Schff.	6. Mtz.	4. Viertele.

Ein Haushalter hat folgende fünf Ausgaben gehabt. Erstlich 136 Gulden, 58 Kreuzer, 3 Pfennige. Zweytens 47 Gulden, 9 Kreuzer, 2 Pfennige. Drittens 204 Gulden, 48 Kreuzer, 3 Pfennige. Viertens 87 Gulden, 8 Kreuzer. Fünftens 107 Gulden, und 3 Pfennige. Wie groß ist die ganze Ausgabe?

fl.	kr.	Pf.
136.	58.	3.
47.	9.	2.
204.	48.	3.
87.	8.	0.
107.	0.	3.
583.	5.	3.

Anmerkung.

Dergleichen Rechnungen kommen sehr oft vor in Verfertigung der Inventarien, und bey den Rechnungen der Haushalter; da es dann sich öfter ereignet, daß man sehr viele dergleichen Posten, welche wohl mehrere Blätter anfüllen, zusammen addiren muß. In diesem Falle dann kann man jede Seite in mehrere Classen abtheilen; jede Classe sonderlich addiren; die Particularsummen eines jeden Blattes auf ein besonderes Papier schreiben: selbe zusammen addiren, damit man also die Summe des ganzen Blattes bekomme. Diese Summe aus allen Classen einer Seite wird zu unterst am

Blatte unter einem Querstriche angeschrieben. Eben diese Summe wird auch zu unterst auf das folgende Blatt geschrieben. Die Posten dieses folgenden Blattes werden, wie zuvor, in eine Summe gebracht; diese Summe unter die vorige geschrieben; beyde zusammen addiret, und also bekömmt man die Summe zwoer Seiten. Diese Summe wird zu unterst auf der dritten Seite wieder angeschrieben; diese dritte Seite abermal zusammen gerechnet, u. s. f. bis man alle Posten in eine Summe gebracht hat.

Ein reicher Bauer hat am Getreide lassen ausdreschen 7 Schaff, 6 Metzen, 3 Vierlinge; und wieder 13 Schaff, 7 Metzen, 2 Vierlinge; und drittens 18 Schaff, 5 Metzen, 3 Vierlinge; und viertens 20 Scheffel, 7 Metzen, 3 Vierlinge; und endlich fünftens 19 Schaff, 3 Metzen, 2 Vierlinge. Was beträgt die ganze Summe?

Sch.	M.	V.
7.	6.	3.
13.	7.	2.
18.	5.	3.
20.	7.	3.
19.	3.	2.
80.	7.	1.

Ein Handelsmann hat einem Tuchmacher folgende Wolle geliefert. Erstens 20 Centner.

ner, 87 Pfunde, 3 Vierlinge. Zweytens 38 Centner, 75 Pfunde. Drittens 41 Centner, 3 Vierlinge. Viertens 54 Centner, 68 Pfunde, 1 Vierling. Wie viel macht alles aus? Der Centner zu 100 Pfunde gerechnet.

Cent.	℔.	V.
20.	87.	3.
38.	75.	0.
41.	0.	3.
54.	68.	1.
155.	31.	3.

II.

Durch die Subtraction.

§. 59.

Bey der Subtraction in benannten Zahlen ist nichts zu erinnern, und gelten die im vierten Abschnitt vorgetragene Regeln, wobey wie bey der Addition gleichnahmige Größen ordentlich unter einander gesetzt werden müßen.

Zum Exempel.

	fl.	kr.	hl.
	88.	28.	3.
	15.	49.	7.
Rest	fl. 72.	38. kr.	4. hl.

Der

Der unter dem Strich gesetzte Rest wurde auf folgende Weise gefunden; als: es sollten 7. hl. von 3. hl. abgezogen werden, weil aber dieses nicht angieng, so borgte man von den gegen die linke Hand aufnotirten Kreuzern einen Kreuzer; hiezu die 3. hl. addirt, machte die Summe also 11. hl. aus; und hierauf von der Summe 11. hl. die gegebene 7. hl. abgezogen, verblieben 4. hl. diese wurden unter den Querstrich unter die Reihe der Häller gesetzt. Eben so konnten 49. kr. von 27. kr. nicht abgezogen werden; man mußte von den Gulden einen entlehnen, welcher 60. kr. hat, hiezu die 27. kr. addiren, und von der Summe 87. kr. alsdenn 49. kr. subtrahiren, wo 38. Rest blieben. Endlich wurde die Subtraction mit den Gulden vorgenommen, und betrug der gesuchte ganze Rest fl. 72. 38. kr. 4. hl.

Exempel zur Uebung.

	Ct.	℔.	Loth.	Quint.
	67.	13.	21.	2.
	58.	64.	29.	3.
Rest.	8. Ct.	48. ℔.	23.	3. Qt.

Eym.	Ms.	Qrtl.
13.	12.	2.
10.	57.	3.
2. Eym.	18. Ms.	3. Qrtl.

Schff.	Mtz.	Vrt.
16.	7.	2.
8.	7.	3.
7. Schff.	7. Mtz.	3. Vrt.

Einer ist schuldig 25 Gulden, 35 Kreuzer, und 2 Pfennige. Daran bezahlt er 15 Gulden, 24 Kreuzer. Was bleibt ihm noch zu bezahlen?

fl.	kr.	Pf.
25.	35.	2.
15.	24.	
10.	11.	2.

Ein Haushalter hat dieses Jahr hindurch eingenommen 785 Gulden, 54 Kreuzer, und 3 Pfennige. Die Ausgabe des gauzen Jahrs beläuft sich auf 640 Gulden, und 3 Pfennige. Wie viel hat er vorgeschlagen?

fl.	kr.	Pf.
785.	54.	3.
640.	0.	3.
145.	54.	0.

Eine Hauserinn hat von ihrer Frau bekommen 15 Gulden. Davon hat sie ausgegeben 5 Gulden, 7 Kreuzer; zweytens 2 Gulden und 5 Kreuzer; und drittens 26 Kreuzer,

zer, 3 Pfennige; was muß sie noch zurücke geben?

	fl.	kr.	Pf.	Ausgaben. fl.	kr.	Pf.
Einnahme.	15.	0.	0.	5.	7.	0.
Sum. der Ausg.	7.	38.	3.	2.	5.	0.
Rest : :	7.	21.	1.	0.	26.	3.
				7.	38.	3.

Ein Kaufmann hat 76 Centner, 87 Pfund Zucker gekauft; davon hat er verkauft 49 Centner, 89 Pfund, und 14 Loth. Wie viel hat er noch im Vorrath?

Cent.	℔.	Lt.
76.	87.	0.
49.	89.	14.
26.	97.	18.

Ein Bauer hat 168 Schaff Getreid aufbehalten. Von diesen verkauft er 65 Schaff, 6 Metzen, 3 Vierlinge. Wie viel behält er noch im Vorrath?

Sch.	M.	V.
168.	0.	0.
65.	6.	3.
102.	1.	1.

Die Sonne läuft den Frühling und Sommer über vom Widder bis in die Wage in 186 Tagen,

Tagen, 14 Stunden, und 53 Minuten; den Herbst und Winter durch von der Wage bis in den Widder in 178 Tagen, 14 Stunden, 56 Minuten. Wie viel ist das erste halbe Jahr größer als das andere?

T.	St.	′
186.	14.	53.
178.	14.	56.
7.	23.	57.

Wenn ein fester Körper in eine flüßige Materie versenkt wird, so verliert er etwas an seiner Schwere. Gesetzt nun, man hätte einen Stein, der in der Luft 100 Pfund wäge. Nun hienge man selben an einem Stricke in das Wasser, und befände an der Waage, daß er nur noch 40 Pfund, 16 Loth, 3 Quintlein wäge. Wie viel würde er im Wasser von seiner Schwere verloren haben?

℔.	Lt.	Qt.
100.	0.	0.
40.	16.	3.
59.	15.	1.

Man kann auch durch die Subtraction das Alter eines Menschen finden. Wobey zu merken ist, daß man in der obern Reihe immer die Zeit des Todes, in der untern Reihe hingegen die Zeit der Geburt ansetzen muß.

Zum

Zum Exempel.

Es ist Jemand im Jahr 1748. den 23. August, Abends um 3. Uhr gebohren worden; und gestorben im Jahr 1798. den 18. December, Morgens um 5. Uhr; wie alt wurde der Mensch?

1798. Jah.	12. Mon.	18. Tag.	5. Stun.
1748.	8. Mon.	23. Tag.	15. Stun.
Alt. 50. Jahr.	3. Mon.	24. Tag.	14. Stun.

In der obern Reihe wurden bey der Zeit des Todes 12 Monat angesetzt, weil der December der zwölfte Monat im Jahr ist; in der untern Reihe hingegen 8 Monat, weil der August der achte Monat im Jahr ist. Desgleichen wurden bey der Zeit des Todes 15 Stunden angesetzt, weil der um Mitternacht anfängt, und von da bis 3 Uhr Abends 15 Stunden verfloßen sind. Bey der Subtraction mußte in der untern Reihe ein Tag, oder 24 Stunden entlehnt, oder geborgt, und hiezu 5 Stunden addirt, von der Summe 29 aber 15 abgezogen werden, wo alsdenn der Rest 14 Stunden blieb. Weil auch 23 Tag von 17 Tag nicht abgezogen werden konnten, so mußte ein Monat, welcher in diesem Exempel 30 Tag hat, denn der vorhergehende Monat November hat nur 30 Tag, geborgt werden. Diese 30 Tage zu 17 Tag addirt, ist die Summe 47 Tag, wovon 23 Tage abgezo-

gezogen werden können, und bleiben 24 Tage Rest. Hierauf 8 Monat von 11 Monat, und 1748 Jahr von 1798 Jahr abgezogen, verbleiben 50 Jahre, 3 Monate, 24 Stunden für das gesuchte Alter.

Exempel zur Uebung.

Es wurde ein Mensch 1724, den 26 September Morgens um 1 Uhr gebohren; und starb derselbe 1 63, den 2ten Februar, Mittags um 12 Uhr, wie alt ist der Mensch geworden? Antwort: 48 Jahre, 4 Monate, 7 Tage, 11 Stunden.

III.

Durch die Multiplication.

§. 60.

Es sollen fl. 15. 54 kr. 7. Pf. mit 7. multiplicirt werden. Dieses kann auf dreyerley Weise geschehen.

1) Multiplicire man zuerst 7. Pfennige mit 7, so giebt das Product 49. Pf. oder wenn man dasselbe mit 4. dividirt 12. kr. und 1. Pf. Hierauf multiplicire man 54. kr. mit 7. so giebt das Product 378. kr. hiezu die vorhingefundene 12. kr. addirt, so ist die Summe 390. kr.; dividirt man diese Zahl mit 60, so giebt der Quotient fl. 6. 30. kr. endlich multipli-

tiplicire man auch 15. fl. mit 7. so ist das Product 105. /, addirt man dazu die so eben gefundene fl. 6. —. so ist die Summe fl. 111. —. und das ganze gesuchte Product ist fl. 111. 30. kr. 1. Pf.

2) Multiplicire man zuvörderst fl. 15. mit 7, so giebt dieses zum Product fl. 105. —. Da nun 54. kr. $\frac{9}{10}$. fl. ausmachen, so multiplicire man solche mit 7, so ist das Product $\frac{63}{10}$, oder fl. $6\frac{3}{10}$. die gefundene fl. 6. addire man zu dem vorher gefundenen Product, nämlich zu fl. 105. —. so ist die Summe fl. 111. —. und da $\frac{1}{10}$. fl. 6. kr. ausmacht, so sind $\frac{3}{10}$. zusammen 18. kr. Nun sind 7. hl. eben soviel, als $\frac{7}{4}$. kr. multiplicirt man nun dieselbe mit 7, so bekommt man zum $\frac{49}{4}$. hl. oder mit 4 dividirt, giebt 12. kr. und 1. hl. zu den vorhero gefundenen 18. kr. addire man nun die so eben berechnete 12. kr. so ist die Summe 30. kr. und weil weiter nichts mehr zu multipliciren vorhanden, so ist das ganze gesuchte Product fl. 111. 30. kr. 1. Pf.

Die 3te und auch gewöhnlichste Weise benannte Zahlen zu multipliciren ist folgende:

Es sollen nämlich fl. 15. 54. kr. 1. Pf. mit 7 multiplicirt werden; so mache man zuvörderst die fl. 15. zu Kreuzer, das heißt, man multiplicire 15 mit 17, so giebt das Product 900. kr., hiezu addire man die nebenstehende 54. kr., so giebt die Summe 954. kr. Diese

Summe 954 mache man zu Pfennige mit 4, so giebt das Product 3816. Pf. hiezu die nebenstehende 1. Pf. addirt, so ist die Summe 3817. Pf. Diese ganze Summe 3817 multiplicire hierauf mit der gegebenen Zahl 7, so ist das Produce 26719. Pf. Dieses Product dividire man mit 4, so bekömmt man 6679. kr., und 3. Pf. bleiben übrig; diesen Quotienten 6679. dividire man endlich mit 60. fl., so giebt der Quotient fl. 111., und 19. kr. bleiben übrig; folglich ist das ganze gesuchte Product fl. 111. 19. kr. 3. Pf.

Dieses Exempel steht in der Rechnung, wie folgt:

```
fl. 15.  54. kr.  1. Pf.
       60.
     -----
      900.
       54.
     -----
      954.
        4.
     -----
     3816.
        1.
     -----
     3817. Pf.
        7. der gegebenen Zahl
   -------
4 | 26719 |
  |  2333 |
6 |0 667|9: 3. Pf.
  |    1|
   -------
fl. 111: 19 kr. 3. Pf.
```

Exem-

Exempel zur Uebung.

Man soll 217 Centner, 83 ℔. 27 Loth mit 236 multipliciren, so ist das Product 51408 Centner, 58 ℔. und 1 Loth.

Man multiplicire 18 Schaff, 7 Metzen, und 3 Vierling mit $\frac{3}{4}$. so muß das Product 14 Centner, 1 Metzen, $3\frac{1}{4}$. Viertel seyn.

Man multiplicire 34 Eymer, 57 Maas mit $2\frac{1}{8}$. so muß zum Product 74 Eymer, $9\frac{1}{8}$. Maas herauskommen.

Eine Armee brauchet monatlich für ihre Pferde 735 Scheffel, 5 Metzen, und 2 Vierling Haber. Was braucht man in 6 Monaten?

	Sch.	M.	V.
	735.	5.	2.
			6.
die Prod. sind	4410.	30.	12.

Ein Speisemeister braucht täglich 3 Eymer, 25 Maaße, und 3 Quärtlein Bier. Was braucht er in einer Woche?

	E.	M.	Q.
	3.	25.	3.
			7.
die Producte sind	21.	175.	21.

Eine Armee von 75000 Mann steht im Felde. Jedem Mann werden wochentlich

3 Pfund, und 2 Vierling Fleisches gereichet. Wie viel braucht man in 6 Wochen?

	℔.	V.
	3.	2.
		6.
die Producte sind	18.	12.

.×75000.

105.
147.

1575000 für alle zugleich
oder 15750 Centner.

Der Mond durchläuft in einer Stunde 32 Minuten, und 56 Secunden in seiner Laufbahne. Wie weit kömmt er in einem Tage?

	′	″
	32.	56.
		24.
die Producte sind	768.	1344.

IV.

Durch die Division.

§. 61.

Es sollen fl. 405: 18. kr. 6. hl. durch 6 dividirt werden; so kann auf zweyerley Art geschehen.

1) Divi=

1) Dividire man in fl. 405 — mit 6, so ist der Quotient fl. 67. —. die übrig gebliebene fl. 3. mache man mit 60. zu Kreuzer, so ist das Product 180 Kreuzer; hiezu addire man die nebenstehende 18. kr.|, so ist davon die Summe 198. Kreuzer, so giebt der Quotient 33 Kreuzer; da nun nichts übrig geblieben; so dividire man endlich in die dabey stehende 6. hl. mit 6, so ist der Quotient 1. hl. und der ganze gesuchte Quotient beträgt fl. 67. 33. kr. 1. hl.

2) Verwandele man die fl. 405. 18. kr. 6. hl., wie oben bey der Multiplieation gezeigt worden ist, in Heller, so ist die gefundene Zahl 194550. Diese dividire man mit 6, so ist der sich ergebende Quotient 32425. Heller. Diese dividire man mit 8., so kommen 4053. kr. heraus, und ein 1. hl. bleibt übrig: diese dividire man wieder mit 60, so giebt der Qotient fl. 67, und 33. kr. bleiben übrig; folglich ist der ganze gesuchte Quotient fl. 67. 33. kr. 1. hl.

fl.	kr.	hl.
405.	18.	6.

```
          fl.      kr.      hl.
          405.     18.      6.
           60.
       ----------------
       24300.
           18. kr. addirt.
       ----------------
        24318. kr.
              8.
       ----------------
       194544.
             6. hl. addirt
       ----------------
   6 | 194550. hl.
     |  1213
       ----------------
   8 | 32425. hl.
            1
       ----------------
   6 |0 kr. 405|3 : 1. hl.
     |       4 |
       ----------------
        fl. 67. 33. kr. 1. hl.
```

Exempel zur Uebung.

Man muß 243. Centner, 79. ℔. und 16. Loth mit 32. dividiren, so ist der Quotient 7. Centner, 61. ℔. und $\frac{1}{2}$. Loth.

Man soll 11. Schaff, 6. Metzen, und 2. Viertel mit 14. dividiren, so muß der Quotient — Schaff, 6. Metzen, und 3. Viertel seyn.

Man soll 69. Eym. 63. Maas mit $18\frac{3}{4}$. dividiren, so giebt der Quotient 3. Eymer, $46\frac{22}{25}$. Maas.

Achter

Achter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 62.

Es können zwey Größen einandtr gleich seyn; oder sie sind einander ungleich. Ist das letztere, und man soll ihre Ungleichheit bestimmen, so kann dieses auf zweyerley Weise geschehen; nämlich: erstens soll man bestimmen, um wie viel die eine Größe die andere übertreffe, oder zweytens, wie vielmal die eine Größe größer sey, als die andere. Beyde Bestimmungen nennt man ein Verhältniß; und zwar die erste, eine **arithmetische Verhältniß**, und die zweyte, oder letztere, eine **geometrische Verhältniß**.

§. 63.

Sollen von zwey Größen ihre Gleichheit, oder Ungleichheit angegeben werden, so folgt hieraus von selbst, daß **die Größen von einerley Art seyn müßen.**

§. 64.

Die Untersuchung, um wie viel die eine Größe größer als die andere ist, geschieht, daß man den Unterschied zwischen den beyden Grös-

sen, oder Zahlen bestimme; dahero ist ein arithmetisches Verhältniß nicht anders, als der Unterschied zwischen zweyen Zahlen.

§. 65.

Der Unterschied zwischen zweyen Zahlen aber wird gefunden, wenn man von der grössern Zahl die kleinere Zahl abzieht. Folglich gehören zu Bestimmung eines arithmetischen Verhältnißes folgende drey Stücke, als: 1) die größere Zahl; 2) die kleinere Zahl; und 3) der Unterschied. Es haben aber diese drey Stücke eine solche Verbindung unter einander, daß man immer aus zwey derselben das dritte finden kann.

§. 66.

Will man aus einer gegebenen größern Zahl, nebst dem gegebenen Unterschied die kleinere Zahl finden, so ziehe man den Unterschied von der größern Zahl ab, so bekommt man die kleiuere Zahl. Z. Ex.

Es sey die größere Zahl = 5.
Der Unterschied = 2.
So ist die kleinere Zahl = 3.

§. 67.

Ist der Unterschied nebst der kleinern Zahl gegeben, so läßt sich die größere dadurch finden,

daß

daß man den gegebenen Unterschied zu der gegebenen kleinern Zahl addirt. Z. Ex. 4. sey der Unterschied, 3. die kleinere Zahl, so muß 7. die größere Zahl seyn.

$$4 + 3 = 7.$$

§. 68.

Sind aber sowohl die größere Zahl, als die kleinere Zahl gegeben, so erhält man den Unterschied, wenn man die kleinere Zahl von der größern abzieht. Z. Ex.

6. sey die größere Zahl,
2. — die kleinere Zahl,

so ist 4. drr Unterschied.

$$6 - 2 = 4.$$

§. 69.

Wird zu den beyden gegebenen Zahlen eine andere beliebige Zahl addirt, oder davon subtrahirt, so bleibt der Unterschied der nemliche.

Z. Ex.

Man addire zu den vorhin gegebenen Zahlen 6. und 2. eine andere Zahl nach Belieben 8., so ist $6 + 8 - 2 + 8 = 4$ Unterschied.

§. 70.

Sind zwey arithmetische Verhältniße einander gleich, so heißt diese Gleichheit, eine **arithmetische Proportion.**

§. 71.

§. 71.

Aus diesem erhellet deutlich, daß eine jede arithmetische Proportion aus vier Gliedern zusammen gesetzt, welche so beschaffen sind, daß, wenn man das zweyte von dem ersten abzieht, der nemliche Rest herauskömmt, als hätte man das vierte von dem dritten abgezogen.

Z. Ex.

18 — 5 = 2 — 7.

Anmerkung.

Diese vier Glieder einer arithmetischen Proportion können auf 8 verschiedene Weise versetzt werden, ohne daß sie deswegen aufhören sollten, einander proportionirt zu seyn, wie

Zum Exempel.

18 — 5 = 20 — 7.
18 — 20 = 5 — 7.
5 — 18 = 7 — 20.
5 — 7 = 18 — 20.
20 — 18 = 7 — 5.
20 — 7 = 18 — 5.
7 — 5 = 20 — 18.
7 — 20 = 5 — 18.

§. 72.

Eine jegliche arithmetische Proportion hat auch überdem noch die Haupteigenschaft nemlich,

daß

daß die Summe des zweyten und dritten Gliedes eben so groß ist, als die Summe des ersten und vierten Gliedes.

Zum Exempel.

$18 - 5 = 20 - 7$
$18 + 7 = 25$ und $5 + 20 = 25$.

§. 73.

Sind in einer aritmetischen Proportion drey Glieder gegeben, so läßt sich nach dem vorigen §. leicht das vierte Glied finden. Denn man darf nur das zweyte und dritte Glied zusammen addiren, und von dieser Summe das erste Glied abziehen, so hat man das vierte Glied.

Zum Exempel.

Es sey das erste Glied = 17.
das zweyte — = 12.
das dritte — = 19.
So ist die Summe des zweyten und dritten = 31. hievon das erste
Glied = 17.
so ist 14. das vierte Glied:
und die arithmetische Proportion:

$17 - 12 = 19 - 14$.

§. 74.

Im 62. §. ist bereits erklärt worden, daß ein geometrisches Verhältniß sey, welches bestim-

stimme, **um wie vielmal** eine Größe größer sey, als eine andere. Dieses findet man, wenn man die eine in die andere dividirt, wo alsdenn der Quotient die Benennung des Verhältnißes anzeigt.

§. 75.

Das geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweyer über einander gesetzten Punkten, wie bey der Division.

§. 76.

Bey einem geometrischen Verhältniß sind drey Stücke in Acht zu nehmen. **Erstlich**, die erste von den beyden gegebenen Zahlen, welche der **Vorsatz**, Antecedens, heißt. **Zweytens**, die andere von den beyden gegebenen Zahlen, welche der **Nachsatz**, Consequens, genennt wird; und **drittens**, die **Benennung des Verhältnißes** der Exponent, welches man finden kann, wenn man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt. Z. Ex. Es soll zwischen 36 und 9 das Verhältniß bestimmt werden; so ist 36 der Vorsatz, 9 der Nachsatz, und die Benennung des Verhältnißes wird seyn $36 : 9 = 4$; welches anzeigt, daß der Vorsatz den Nachsatz viermal in sich enthalte.

§. 77.

Eine geometrische Proportion ist nichts anders, als die Gleichheit zweyer geometrischen Verhältniße. Z. Ex.

24 : 8 = 18. 6.

§. 78.

Eine jede geometrische Proportion besteht aus vier Gliedern, welche die Eigenschaft haben müßen, daß, wenn man das erste durch das zweyte dividirt, eben soviel herauskommen muß, als wenn man das dritte durch das vierte dividirt; auch lassen sich die vier Glieder einer geometrischen Proportion auf acht verschiedene Weise versetzen, ohne daß sie deswegen aufhören sollten, einander proportionirt zu seyn; wie

Zum Exempel.

24 : 8 = 18 : 6.
24 : 18 = 8 : 6.
8 : 24 = 6 : 18.
8 : 6 = 24 : 18.
18 : 24 = 6 : 8.
18 : 6 = 24 : 8.
6 : 8 = 18 : 24.
6 : 18 = 8 : 24.

§. 79.

Hieraus fließt ganz deutlich die sehr wichtige Haupteigenschaft, daß das Product aus dem

dem ersten und vierten Glied, dem Produkte aus dem zweyten und dritten Glied beständig gleich seyn muß, oder daß das Product der beyden äußern Glieder dem Producte der beyden innern Glieder gleich sey. Z. Ex.

I. II. III. IV.
1 : 2 = 24 : 6.

I 8 × IV 6 = 48. oder II 2 × III 24 = 48.

§. 80.

Aus dieser Haupteigenschaft folgt ganz deutlich, daß, wenn die drey ersten Glieder eine geometrische Proportion gegeben sind, man leicht das vierte finden könne. Denn man darf nur bie beyden mittlern Glieder mit einander multipliciren, und mit dem ersten Glied in dieses Product dividiren, so giebt der Quotient das vierte Glied. Z. Ex. Es seyen die drey ersten Glieder 8 : 2 = 24. zu. : : fl. ist das Product der beyden mittlen Glieder von
II III
2. 24 = 48. hierein mit dem ersten Glied = 8 dividirt, so giebt der Quotient 6 das gesuchte vierte Glied, und folglich ist die geometrische Proportion. 8 : 2 = 24 : 6. und hierauf beruhet der Grund der so berühmten **Regel Detri.**

Neun=

Neunter Abschnitt.

Von der Regel De-tri überhaupt.

§. 81.

Die Regel De-tri ist diejenige Vorschrift, nach welcher aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer geometrischen Proportion stehet, so, daß sich die erste verhalte zur zweyten, wie die dritte zur vierten.

§. 82.

Die Vorschriften der Regel De-tri, wenn man dieselbe Ueberhaupts betrachtet, bestehet darinn, daß man 1) die drey gegebenen Zahlen sammt der unbekannten in eine solche Proportion bringe, damit das unbekannte Glied immer das vierte werde; und

2) daß man alsdenn die beyden mittlern miteinander multiplicire, und mit den erstern in das Product dividire.

§. 83.

Die Vorschriften der Regel De-tri, wenn man dieselben insonderheit betrachtet, sind 1) daß man bey benannten Zahlen, welche hier vorzüglich vorkommen, die Glieder der Verhältnisse, so dieselben aus verschiedenen

Einheiten bestehen, in die kleinsten Einheiten von einerley Benennung verwandele; auch wenn Brüche vorkommen, dieselbe einrichte. Z. Ex. Es bestünde ein Glied aus Gulden, Kreuzer und Heller, so verwandele man solches in lauter Heller. Befindet sich bey den Hellern ein Bruch, so multiplicire man solche mit dem Nenner des Bruchs, addire den Zähler dazu, und setze den Nenner wieder darunter.

2) Muß das unbekannte Glied, wenn man es gefunden hat, die nämliche Benennung bekommen, welche das dritte Giied hat. Z. Ex. Es sey das dritte Glied Pfunde, so muß das vierte auch Pfunde seyn.

§. 84.

Die Regel De-tri wird in zwey Haupttheile abgetheilt, und heißt die erste davon **die einfache, oder eigentliche Regel De-tri**; die andere hingegen **die zusammengesetzte Regel De-tri.**

§. 85.

Die **einfache Regel De-tri** nennt man diejenige, wenn drey Glieder aus einer einigen Proportion gegeben sind, und in welcher man das vierte unbekannte Glied suchen soll.

§. 86.

Die zusammengesetzte Regel De-tri besteht darinn, wenn mehrere Glieder aus verschiedenen Proportionen gegeben sind, dazu ein oder mehrere unbekannte Glieder gesucht werden sollen.

§. 87.

Die zusammengesetzte Regel De-tri wird wieder in drey besondere Theile abgetheilt; als: 1) in die Regel von Fünfen, oder de Quinque, wenn fünf Glieder aus zwey verschiedenen Proportionen gegeben sind.

2) In die Ketten-Regel, wenn Glieder aus mehrern Proportionen gegeben sind; und

3) In die Gesellschafts-Rechnung, wenn Gewinn und Verlust unter mehrern nach dem Verhältniß dessen, was sie zusammen geschossen haben, getheilt werden soll.

§. 88.

Diese leztere, nämlich die Gesellschafts-Regel hat wieder ihre Unterabtheilungen; als:

a) Die Vermischungs-Regel, in welcher gefunden wird, wie viel aus den gegebenen Verhältnissen einzelner Materien von jeder zu einer gegebenen vermischten Menge genommen werden muß; und

b) Die Falsi-Rechnung, in welcher die unbekannten Glieder der Proportionen nach gegebenen Verhältnissen willkührlich angenommen werden, ehe und bevor man ihre wahre Größe herausbringen kann.

§. 89.

Man theilt auch sowohl die einfache als die zusammengesetzte Regel De-tri in die gerade und umgekehrte Regel De-tri ein. Die erste begreift diejenigen Exempel in sich, in welchen die drey gegebenen Glieder der Proportion so auf einander folgen, daß das unbekannte Glied das vierte Glied ist. Die andere aber begreift diejenigen Exempel in sich, in welchen die drey gegebenen Glieder erst versetzt werden müssen, um das unbekannte Glied zum vierten zu machen.

Zehnter Abschnitt.

Von der einfachen Regel De-tri, und zwar, a) der geraden oder direkten Regel De-tri.

§. 90.

Die Exempel, welche in der geraden oder direkten Regel De-tri vorkommen können, werden eingetheilt.

1) In

1) In solche, welche im ersten Glied 1 haben; und zwar mit einer solchen Benennung, die im zweyten Glied allein vorkommt; oder unter welche das zweyte Glied gebracht werden kann; in diesem Falle darf man nur das zweyte und dritte Glied mit einander multipliciren, so giebt das Product das vierte Glied, weil mit 1 nicht dividirt wird.

2) In solche, welche im zweyten und dritten Glied 1 haben, wo man alsdenn nur mit dem ersten Glied in das zweyte oder dritte Glied dividiren darf, weil mit 1 nicht multiplicirt wird; und

3) In solche, welche in allen gegebenen Gliedern mehrere Einheiten haben, wobey die beyden mittlere Glieder in einander multiplicirt werden müssen, und das Product durch das erste Glied dividirt werden muß.

Exempel zu No. 1.

Es kostet 1 ℔. Coffee fl. 1. 28. kr.

Wie viel kosten 12 ℔. Coffee?

Das erste Glied ist 1.

Das zweyte „ „ 12.

Das dritte „ „ fl. 1. 28. kr. oder 88 kr.

Wenn man also das zweyte mit dem dritten multiplicirt, so giebt das Product 1056 kr. oder fl. 17. 36. kr., und weil mit 1 nicht dividirt wird, so bleibt das Product die Antwort

auf die vorgelegte Frage; und das Exempel wird stehen, wie folgt:

```
   ℔.  ℔.     fl.  kr.
   1 : 12 = 1 : 28 : fl. 17. 36. kr.
              60
            ─────
              88
              12
            ─────
             176
              88
          ─────────
          6|0 105|6
            fl. 17 : 36. kr.
```

2) Es koste 1 ℔. Zucker fl. 1. 36. kr. wie hoch kommen 18 ℔. Zucker zu stehen? Antwort: fl. 28. 48. kr.

3) Eine Elle Leinwand koste 36. kr. was gelten $13\frac{1}{2}$. Ellen? Antwort: fl. 8. 6. kr.

4) 1 ℔. Weinbeer koste 20 kr. was kosten 2 Ct.? Antwort: fl. 66. 40. kr.

```
   ℔.   Ct.     kr.    fl.   kr.
   1 :  2  =  20  :  66 : 40.
       ──────
       200 ℔.
           20.
       ──────────
     6|0 400|0.
```

In diesem Exempel müssen die 2 Ct. erst zu ℔. gemacht werden, da denn solche 200 ℔. geben; multiplirt man diese mit dem dritten Glied,

Glied, so ist das Product 4000 kr. diese betragen nach der Reduction fl. 66. 40 kr. und weil mit 1 nicht dividirt wird, so ist das gesuchte vierte Glied fl. 66. 40. kr.

5) Wenn 1 Loth $5\frac{3}{4}$ kr. kostet; was kosten, 3 ℔. $26\frac{3}{4}$. Lt.? Antwort: fl. 11. $45\frac{13}{16}$ kr.

Lt. ℔. Lt.

1 : 3 : $26\frac{3}{4}$ = $5\frac{3}{4}$ kr.

32. 23

$122\frac{3}{4}$ 4

491

4

491

23

1473

982 6|0

16 | 11293|70|$5\frac{13}{16}$|fl. 11:$45\frac{13}{16}$. k.

112

...93

80

13

16

6) Um fl. 1. hat man gekauft $\frac{5}{12}$. Ellen Tuch; wie hoch kommt $\frac{1}{4}$. Ellen zu stehen? Antwort: fl. $\frac{5}{48}$.

7) Wenn eine Person des Tags fl. $1\frac{2}{5}$ — verzehrt; wie viel braucht diese Person in ei-

nem Jahr, oder in 365 Tagen? Antwort: fl. 51 1. —

8) Ein Taglöhner verdient alle Tage $\frac{3}{5}$ fl. wie viel kann er in $11\frac{1}{2}$ Wochen, die Woche zu 6 Werkeltagen gerechnet, verdienen? Antwort: fl. $41\frac{2}{3}$.

Exempel zu No. 2.

1) Es kosten 24 Ellen fl. 50. — was kostet 1 Ellen? Antwort: fl. $2\frac{1}{12}$.

Ellen Ellen fl. fl.
24 : 1 = 50 : $2\frac{1}{12}$.

2) 5 Ct. Coffee kosten fl. 733. 20. kr. was kostet 1 Ct.? Antwort: fl. 146. 40. kr.

Ct. C. fl. kr. fl.
5 : 1 = 733. 20 :
60
5 | 4000 |
| 4 |
6 | 0 880 | 0 kr.
| 24 |
146 fl. 40. kr.

3) 13 Eymer Wein kosten fl. $422\frac{1}{2}$. was gilt 1 Eymer? Antwort: fl. $32\frac{1}{2}$.

Eym.

Cym.	Cym.	fl.	fl.
13	: 1	= $422\frac{1}{2}$	: $32\frac{1}{2}$.

```
 13 : 1 = 422½ : 32½.
 ──
 26     26 |845| 32½.
           |78 |
           ─────
            65
            52
           ────
            13 | ½
           ────
            26
```

4) $19\frac{3}{4}$ Schaff Roggen gelten fl. 325 : $32\frac{3}{4}$. kr. was kostet 1 Schaff Roggen? Antwort: fl. 16. 29. kr.

5) 34 Pf. 3 Lt. Flachs kosten fl. 17: $19\frac{55}{64}$. kr. was kostet 1 Pf. Flachs? Antwort: $30\frac{1}{2}$. kr.

6) $\frac{7}{8}$. Ct. um fl. $\frac{5}{6}$., wie theuer kommt 1 Pf.? Antwort: fl. $1\frac{1}{20}$.

Exempel zu No. 3.

1) 5 Pf. kosten fl. 12., was kosten 15 Pf. Antwort: fl. 36. —.

Pf.	Pf.	fl.	fl.
5	: 15	= 12	: 36.

```
    5 : 15 = 12 : 36.
         12
        ────
         30
        15
        ────
   5 : 180| 36
       15
       ────
        30
```

2) 3 Centner 57 Pfund 19 Loth kosten fl. 273. — wie kommen 2 Centner, 34 Pf. uud 31 Loth zu stehen? Antwort:

fl. $198\frac{3773}{10343}$.

3) 7 Ellen um fl. $9\frac{1}{2}$. wie hoch kommen 91 Ellen? Antwort: fl. $123\frac{1}{2}$.

4) $\frac{7}{8}$. Ellen um fl. 15. 27. kr. 4. hl. wie kommen $\frac{15}{16}$. Ellen? Antwort: fl. 16. 33. kr. 6. hl.

5) $\frac{5}{12}$. Pf. um fl. $\frac{7}{12}$, wie hoch $\frac{15}{16}$. Pf. Antwort: fl. 1. 18. kr. 3. pf.

6) Um fl. $\frac{3}{4}$. bekommt man $\frac{4}{5}$. Pf. wie viel bekommt man um fl. $\frac{5}{8}$.? Antwort: $\frac{2}{3}$. Pf.

§. 91.

3) Der umgekehrten Regel De-tri.

Nach der im §. 89. gegebenen Erklärung von der umgekehrten Regel De-tri besteht dieselbe darinn, daß man die drey gegebene Glieder erst versetze; um das unbekannte Glied zum vierten machen zu können.

Zum Exempel.

Es haben 20 Personen an einem Graben täglich 5 Ellen ausgegraben, wie viel braucht man Personen, daß an dem Graben täglich 100 Ellen ausgegraben werden? Würde man bey

bey dieser Aufgabe die Glieder der Proportion in derjenigen Ordnung ansetzen, in welcher sie gegeben sind, und auf solche Weise das vierte Glied suchen, so gäbe der Quotient 25 Personen. Es ist aber augenscheinlich klar, daß 25 Personen nicht im Stande seyn können, 100 Ellen auszugraben, da 20 Personen nur 5 Ellen ausgraben können. Man muß daher untersuchen, welches Glied von den drey gegebenen in der Proportion fehlt; wobey es sich nach genauer Ueberlegung zeigt, daß das zweyte Glied fehlt. Denn 5 Ellen verhalten sich zu 100 Ellen, wie 20 Personen sich verhalten zu der gesuchten Anzahl von Personen, Man setzt also das letzte Verhältniß voran, damit das fehlende Glied das vierte werde; und die Rechnung ist demnach folgende:

Ellen	Ellen	Person.	Person.	
5 :	100 =	20 :	400	vierte unbekannte Glied.

$$\begin{array}{r|r|l} & 20 & \\ \hline 5 & 2000 & 400. \\ & 20 & \end{array}$$

2) 6 Taglöhner verfertigen in 8 Tagen eine gewisse Arbeit, wie lange haben 12 Arbeiter daran zu thun? Antwort: 4 Tage.

3) 1000 Soldaten sind auf 6 Monat verproviantirt, wie lange brauchten 500 Soldaten zu diesem Vorrath? Antw. 12 Monate.

4)

4) 2 Schuhmacher verfertigen in einem Tag 3 Paar Schuhe. Es sollen aber in einem Tag 50 Paar Schuhe fertig werden; wie viel braucht man hiezu Schuhmacher? Antwort: 33 Schuhmacher.

Paar Paar Schuster Schuster

3 : 50 = 2 : 33.

$$\frac{50 \cdot 2}{3} = \frac{100}{3} = 33$$

3 | 100 | 33 Schuster.

5) Zu einem Kleid braucht man 5 Ellen Tuch, wenn dasselbe $\frac{7}{4}$ Ellen breit ist; wie viel Ellen aber werden erfordert, wenn dasselbe nur $\frac{6}{4}$ Ellen breit ist? Antw. $5\frac{5}{6}$ Ellen.

6) Ein Bothe geht alle Tage 5 Meilen, und kommt in 12 Tagen an Ort und Stelle; ein anderer Bothe soll in 8 Tagen in dem nämlichen Ort eintreffen, wie viel Meilen muß derselbe des Tags machen? Antw. $7\frac{1}{2}$ Meile.

Anmerkung.

Da nicht nur jedes Land, sondern auch wohl oft eine jede Stadt ihr eigenes Maaß und Gewicht hat; und es doch öfters höchst nothwendig ist, daß man die Verhältnisse gegen einander wissen muß, um die Maaße und Gewichte des einen Lands zu den Maaßen und Gewichten des andern Landes reduciren zu können, so sind folgende Tabellen, worinnen die Verhältnisse der Maaße und angegeben sind, sehr nützlich; als

Ver-

Vergleichung der Schuhe verschiedener Oerter nach dem Pariser Schuh.

Wenn der Pariser Schuh in 1440 gleiche Theile abgetheilt wird, so hat

der	Achner	128, 5.
	Amsterdamer	125, 0.
	Anspacher	132, 0.
	Antwerper	126, 6.
	Augsburger	131, 3.
	Avignoner	110, 0.
	Baseler	132, 2.
	Bayrischer	128, 0.
	Berliner	137, 3.
	Berner	130, 1.
	Bologner	168, 2.
	Braunschweiger	126, 5.
	Bremer	128, 2.
	Breslauer	126, 0.
	Brüßeler	129, 0.
	Cairo	245, 9.
	China	147, 7.
	Cleve	131, 0.
	Cölner	122, 0.
	Constantinopoler	314, 0.
	Coppenhagner	139, 1.

Der

der	Cracauer	: :	158, 0.
	Danziger	: :	127, 2.
	Dordrechter	: :	159, 6.
	Dresdner	: :	125, 5.
	Egyptner	: :	245, 9.
	Engländer	: :	135, 1.
	Frankfurter am Mayn	:	127, 0.
	Frankreich	: :	144, 0.
	Genfer	: : :	216, 3.
	Gibralter	: : :	125, 3.
	Gießen	: : :	132, 0.
	Griechischer	: : :	135, 8.
	Gröninger	: : :	129, 5.
	Hager, in Holland	:	144, 0.
	Halle	: : : :	132, 0.
	Hamburger	: : :	127, 0.
	Hannover	: : :	129, 5.
	Hebräischer	: : :	159, 0.
	Heydelberger	: : :	123, 5.
	Hildesheimer	: :	124, 2.
	Hollsteiner	: : :	132, 3.
	Inspruccker	: :	140, 8.
	Königsberger	: : :	136, 4.
	Leidener	: : :	139, 0.
	Leipziger	: : :	125, 3.

der

der Lioner	151, 5.
Lißaboner	150, 1.
Löwener	126, 6.
Londner	135, 1.
Lothringer	129, 1.
Lübecker	129, 0.
Lütticher	127, 5.
Manheimer	128, 6.
Mantuaner Bracci	206, 2.
Maynzer	133, 5.
Mechelner	123, 9.
Mecklenburger	129, 0.
Mildelburger	133, 0.
Münchner	128, 0.
Neapel, Palmi	116, 9.
Nürnberger	134, 7.
Oldenburger	131, 3.
Osnabrücker	123, 8.
Pariser, Toises	864, 0.
Königl. Schuh	144, 0.
Persien Arish	431, 0.
Pommernscher	129, 5.
Prager	133, 8.
Rivaler	118, 7.
Rheinländischer	139, 1.

der Rigaischer		121, 5.
Römischer,	Baucanne	990, 0.
— —	Schuh	130, 6.
— —	Palm	99, 0.
— —	alter Schuh	132, 0.
Rostocker		128, 2.
Rotterdamer		138, 5.
Rußland		238, 6.
Sardinien		
Palm. di Sardegna		111, 3.
	Cagliari	89, 8.
Schwedischer,	Faden	789, 6.
— — —	Schuh	131, 6.
Spanischer,	Schuh	125, 3.
— — —	Palmos	94, 0.
Stettiner		125, 3.
Stockholmer		131, 6.
Strasburger		128, 3.
Stuttgarder		126, 8.
Turiner		143, 2.
Ulmer		128, 1.
Utrechter		121, 0.
Venediger		154, 0.
Veronaer		154, 0.
Wiener		142, 0.

der

der Wittenberger : : :	148, 5.
Zelle : : : :	129, 2.
Züricher : : : :	133, 1.

Vergleichung der vornehmsten Europäischen Meilen.

Nach Geometrischen Schritten zu 5 Schuh.

	Schritte.
Eine Rußische Meile : :	750.
— Italienische : : :	1000.
— Engelländische : : :	1250.
— kleine Französische : :	2000.
— gemeine : : : :	2500.
— große : : : :	3000.
— Polnische : : : :	3000.
— Spanische : : : :	3428.
— Schwedische : : :	5000.
— Dänische : : :	5000.
— Ungarische : : :	6000.
— Deutsche : : : :	4000.

Nach dem Rheinländischen Schuh.

	Rheinländ. Sch.
Eine Böhmische Meile mißt :	22017.
— Burgundische : : :	18016.
— Churbraunschweigische :	33737.

G Eine

Bayerische Staatsbibliothek MÜNCHEN

	Rheinländ. Sch.
Eine Dänische Meile mißt :	24000.
— Deutsche oder Germanische	14197.
— : neue : : :	20000.
— : gemeine : :	
— : Geometrische :	23661.
— Französische (Leuke) :	7042.
— — (Lieue) : :	14197.
— kleine von 2000 Toisen :	12418.
— große von 2500 : :	15523.
— Großbrittanische, alte Brittische	7456.
— neue Englische zu 1760 Yards	513.
— Hamburger : : :	24000.
— Holländische : : :	18680.
— Irländische : : :	6536.
— Italienische : : :	5915.
— Londner von $1666\frac{2}{3}$ Yards	4862.
— Polnische : : :	17745.
— Portugiesische : : :	19717.
— Preußische : : :	24700.
— Römische von 8 olymp. Stadien	4701.
— Rußische von 1500 Arschin :	3402.
— Sächsische Polizey: Meile von 16000 Dresdner Ellen	28878.
— Schlesische von 11250 Schlesischen Ellen : : :	20658.

Eine

	Rheinländ. Sch.
Eine Schottländische von 1147 franz. Klaftern : : :	7119.
— Schwedische von 18000 Schwed. Ellen : : :	34094.
— Schweizerische : : :	26888.
— Spanische oder Kastilianische von 2147 franz. Klaftern	13328.
— Stadien Olympische : :	591.
— Ungarische : : :	26625.

Vergleichung der Ellen von verschiedenen Oertern.

100 Pariser Ellen machen

zu Amsterdam : : : :	$173\frac{1}{2}$.
— Antwerpen : : : :	$171\frac{3}{4}$.
— Avignon : : : :	100--.
— Augsburg : : : :	$208\frac{3}{4}$.
— Basel : : : : :	$208\frac{3}{4}$.
— Barcellona : : : :	$72\frac{1}{4}$.
— Bergen : : : :	$190\frac{3}{4}$.
— Bern : : : : :	$216\frac{2}{3}$.
— Bourdeaux : : : :	$101\frac{1}{2}$.
— Bretagne : : : :	$85\frac{3}{4}$.
— Bremen : : : :	$208\frac{3}{4}$.
— Breslau : : : :	$217\frac{1}{3}$.

zu Brüßel : : : :	$171\frac{3}{4}$.
— Cadix : : : : :	$138\frac{3}{4}$.
— Cambray : : : :	$159\frac{1}{2}$.
— Castilien : : : :	$138\frac{3}{4}$.
— Cölln : : : :	$208\frac{3}{4}$.
— Constantinopel : : :	178--.
— Coppenhagen : : :	$194\frac{3}{4}$.
— Dresden : : : :	$206\frac{1}{4}$.
— Drontheim : : : :	190--.
— Dublin und Edinburg : :	130--.
— Florenz : : : :	199--.
— Genua : : :	$476\frac{4}{11}$ Palmi.
10 Palmi machen in Seide :	9--.
in Wolle 8. in Leinwand : :	1--.
— Frankfurt : : : :	$208\frac{3}{4}$.
— Genf : : : :	104--.
— Harlem : : : : :	$173\frac{1}{2}$.
— Hamburg : : : :	$208\frac{3}{4}$.
— Haag : : : : :	$174\frac{1}{2}$.
— Ostindien : : : :	260--.
— Königsberg : : : :	$208\frac{3}{4}$.
— Lausanne : : : :	$111\frac{1}{9}$.
— Leiden : : : : :	$173\frac{1}{2}$.
— Leipzig : : : : :	$208\frac{3}{4}$.
— Lenzburg : : : :	$190\frac{1}{2}$.
— Lille : : : : :	169--.

zu Lion	102--.
— Lißabon	173½.
— Livorno	199--.
— London in wollenen Stoffen	128--.
in Leinwand	100--.
— Lübeck	208--.
— Lucca	199--.
— Lucern	208¾.
— Madrit	138¾.
— Mantua	182½.
— Marseille	100--.
— Meßina	59--.
— Mayland in Wolle	177--.
in Seide	222¾.
— Minden	288--.
— Modena	182½.
— Montpellier	60--.
— Nantes	85¾.
— Neapel	101½.
— Neuschatell	107--.
— Norwegen	173½.
— Nürnberg	173½.
— Osnabrück	100--.
— Palermo	59--.
— Parma	214¾.
— Picardie	145--.

zu Prag . . . . . $198\frac{1}{2}$.
— Riga . . . . . $210\frac{1}{4}$.
— Rochelle . . . . 100 --.
— Rom in Wolle . . . $173\frac{1}{2}$.
. in Leinwand . . 58 --.
— Rouan in Seide . . . 100 --.
. in Leinwand . . $83\frac{1}{3}$.
— Rußland . . . . 164 --.
— St. Gallen in Leinwand . $149\frac{1}{4}$.
. in Wollen . . $194\frac{3}{4}$.
— Schweiz, Kanton . . 208 --.
— Smirna . . . . 175 --.
— Stockholm . . . . 199 --.
— Strasburg . . . . 208 --.
— Toulouse . . . . $66\frac{2}{3}$.
— Turin . . . . $197\frac{1}{2}$.
— Valentia . . . . 130 --.
— Venedig in Tüchern . . 179 --.
. in Gold- und Silberstoff 190 --.
— Unterwalden, Uri . . 208 --.
— Ulm . . . . . $208\frac{3}{4}$.
— Wien . . . . 149 --.
— Zopfingen . . . . 100 --.
— Zürch . . . . . 199 --.

Ver-

Vergleichung der Gewichte verschiedener Oerter.

100 Pfund zu Genf machen

zu Achen	$117\frac{11}{16}$.
— Alikante	110—.
— Amsterdam	$111\frac{11}{16}$.
— Antwerpen	$117\frac{11}{16}$.
— Augsburg	$112\frac{3}{8}$. schwer
	$116\frac{11}{16}$. leicht Gew.
— Basel	$110\frac{1}{4}$.
— Bautzen	$127\frac{1}{4}$.
— Bergamo	190. leicht
—	$76\frac{1}{4}$. schwer
— Bergen op Zoom	$119\frac{5}{8}$.
— Berlin	$117\frac{7}{8}$.
— Bern	$114\frac{3}{4}$.
— Bologna	$152\frac{1}{16}$.
— Bourdeaux	$112\frac{1}{4}$.
— Bremen	$112\frac{1}{16}$.
— Breslau	$136\frac{1}{8}$.
— Braunschweig	$118\frac{3}{16}$.
— Brüßel	$117\frac{11}{16}$.
— Cadix	$120\frac{15}{16}$.
— Cölln	$118\frac{3}{16}$.
— Constantinopel	$43\frac{1}{2}$.
— Coppenhagen	$117\frac{5}{8}$.

zu Craccau = =	$136\frac{1}{4}$.	
— Danzig = =	$126\frac{11}{16}$.	
— Dordrecht = =	$112\frac{1}{2}$.	
— Dublin = =	$109\frac{1}{8}$.	
— Dünkirchen =	$131\frac{13}{16}$.	
— Edimburg = =	$109\frac{1}{8}$.	
— Florenz = =	$162\frac{5}{8}$.	
— Frankfurt am Mayn	$118\frac{1}{8}$.	
— Gent = =	$118\frac{1}{8}$.	
— Genua = =	$103\frac{1}{2}$.	groß Gew.
= = =	$174\frac{1}{4}$.	leicht Gew.
— Halle = = =	118--.	
— Hamburg = =	$113\frac{3}{4}$.	
— Königsberg = =	$144\frac{1}{16}$.	alt Gew.
= = =	$117\frac{1}{4}$.	neu Gew.
— Leipzig = =	$118\frac{3}{16}$.	
— Lille = = =	$128\frac{1}{4}$.	
— Lindau = =	$120\frac{1}{8}$.	
— Lion = = =	$131\frac{13}{16}$.	
— Lißabon = =	$120\frac{3}{16}$.	
— Livorno = =	$161\frac{15}{16}$.	
— London = =	122—.	
— Lübeck = =	$114\frac{1}{8}$.	
— Lüttich = =	$118\frac{3}{4}$.	
— Lucca = =	$165\frac{3}{8}$.	
— Lüneburg = =	$113\frac{7}{16}$.	

zu Madrit = = $128\frac{1}{4}$.

— Mageburg = = $117\frac{1}{2}$.

— Mallaga = = $120\frac{3}{16}$.

— Mantua = = $194\frac{5}{8}$.

— Marseille = = $133\frac{3}{8}$.

— Meßina = = 175—. leicht Gew.

= = = 64—. schw. Gew.

— Modena = = 162—.

— Montpellier = 135—.

— Moskau = = $134\frac{7}{8}$.

— München = = $98\frac{3}{4}$.

— Mexico = = $120\frac{3}{8}$.

— Nancy = = $119\frac{1}{4}$.

— Nantes = = $111\frac{1}{2}$.

— Neapel = = $129\frac{15}{16}$.

— Naumburg = = $118\frac{1}{8}$.

— Nürnberg = = 109—.

— Palermo = = 175—. leicht Gew.

— Paris = = $112\frac{1}{2}$.

— Petersburg = = 135—.

— Prag = = = $107\frac{3}{8}$.

— Regensburg = = $98\frac{3}{8}$.

— Riga = = = $131\frac{15}{16}$.

— Rochelle = = $111\frac{1}{2}$.

— Rom = = = $163\frac{7}{8}$. leicht

= = = = $64\frac{1}{2}$. schwer

zu Rotterdam	$112\frac{1}{2}$.	
— St. Gallen	$94\frac{3}{8}$.	
— Salzburg	$98\frac{9}{16}$.	
— Schaffhausen	$120\frac{1}{16}$.	
— Smirna	$97\frac{7}{8}$.	
— Stettin	$123\frac{3}{4}$.	
— Stockholm	$131\frac{5}{8}$.	
— Strasburg	117—.	
— Toulouse	$132\frac{3}{4}$.	
— Triest	$98\frac{3}{16}$.	
— Turin	150—.	
— Ulm	$117\frac{11}{16}$.	
— Valencia	$178\frac{1}{4}$.	
— Venedig	$115\frac{11}{16}$.	groß
	183—.	klein
— Verona	$110\frac{15}{16}$.	groß
	$166\frac{9}{16}$.	klein
— Warschau	146—.	
— Wien	$98\frac{3}{16}$.	
— Wittenberg	$117\frac{15}{16}$.	
— Zittau	$117\frac{15}{16}$.	
— Zürch	$104\frac{3}{8}$.	
— Zurzach	105—.	

Ver-

Vergleichung des alten jüdischen Längenmaaßes gegen den Pariser-Schuh.

Digitus, oder Finger	99,41.
Palmus, oder Handbreit	397,64.
Spitama, Spanne	1192,93.
Pes, Schuh	1590,57.
Cubitus communis, oder gemeine Elle	2385,85.
Cubitus sacer, oder heilige Elle	2783,49.

Vergleichung der alten jüdischen Münzen gegen unser Reichsgeld.

Minutum	$\frac{9}{32}$ eines Pfennigs
Quadrans	$\frac{9}{16}$ eines Pfennigs
Assarius	$2\frac{1}{4}$ Pfennige
Gerah	2 Kreuzer, 1 Pfen.
Denarius, oder Drachma	11 Kreuz. 1 Pfen.
Didrachma, oder Siclus profanus	22 Kreuz. 2 Pfen.
Siclus sacer, oder Stater	45 Kreuz. —
Minah, Mna, ein Pfund Silber	25 Rchsthl.
Ein Pfund Gold	300 Rchsthl.
Ein Talent Silber	1500 Rchsthl.
Ein Talent Gold	18000 Rchsthl.

Nach

Nach diesen Tabellen können nach der Regel de Tri, wieviel eine gegebene Anzahl von Ellen, Pfunden u. s. w. eines Landes in einem andern Lande ausmachen, berechnet werden; und ist hiebey folgende Regel zu beobachten: als:

Man schreibe jene Zahl, welche in der Tabelle vor jenem Lande steht, dessen Ellen, Pfund u. s. w. man reduciren will, als das erste Glied der Proportion: jene Zahl, welche in der Tabelle bey jenem Lande steht, zu dessen Ellen, Pfunden, u. s. w. man die Reduction zu machen verlangt, setze man in die zweyte Stelle: die Anzahl der Ellen, Pfunde u. s. w., welche reducirt werden sollen, schreibe man in die dritte Stelle; so wird das vierte Glied die gesuchte Anzahl der Ellen, Pfunde, u. s. w. geben. Bey der Reduction der Ellen, Pfunde und Meilen bedient man sich der geraden Regel de Tri. Bey der Reduction der Schuhe aber der verkehrten Regel de Tri.

Erstes Exempel in Ellen.

Ein Kaufmann hat zu Amsterdam 200 Ellen Tuch gekauft. Wieviel machen diese Augsburger Ellen? Antwort: $240\frac{70}{347}$ Augsburger Ellen.

Man schlage in der Tabelle von Ellen Amsterdam nach, so steht nebenbey die Zahl $173\frac{1}{2}$, welche man in die erste Stelle setzen muß. In der

der nemlichen Tabelle suche man die Zahl, so neben Augsburg steht; so findet man $208\frac{3}{4}$; diese setze man in die zweyte Stelle. Die Anzahl der Ellen, so reducirt werden sollen, nemlich 200, setze man an die dritte Stelle; so stehen die Glieder der Proportion also:

$173\frac{1}{2} : 208\frac{3}{4} = 200$: und das vierte Glied wird nach der geraden Regel de Tri gesucht.

Amsterdam	Augsb.	Amst. Ellen	Augsb. Ellen.
$173\frac{1}{2}$:	$208\frac{3}{4}$ =	200 :	$240\frac{70}{347}$.

Zweytes Exempel in Gewicht.

Ein Kaufmann zu Venedig hat 300 ℔. Caffee gekauft; wieviel Pfunde, schwer Gewicht, hat er zu Augsburg? Antwort: $291\frac{253}{617}$ ℔. Augsburger Pfunde schwer Gewicht.

Drittes Exempel in Meilen.

Wieviel machen 350 Spanische Meilen deutsche Meilen? Antwort: $525\frac{175}{833}$ deutsche Meilen.

Spanische.	Deutsche.	Spanische.	Deutsche.
13328 :	20000 =	350 :	$525\frac{175}{833}$.

Viertes Exempel in Schuhen.

Wieviel machen 112 Berliner Schuh in Augsburg? Antwort: $117\frac{155}{1313}$ Augsburger Schuh.

Die

Die Auflösung nach der verkehrten Regel de Tri ist demnach folgende:

Augsb. Berlin. Berlin. Augsb.

1313 : 1373 = 112 : 117$\frac{155}{1313}$.

117 : 112

2746
1373
1373

153776
1313..

2247
1313

9346
9191

155
1313

Fünftes Exempel in jüdischen Münzen.

Der heilige Marcus sagt am zwölften Kapitel, die arme Wittwe habe zwey Minuta geopfert, wieviel beträgt dieses in der Reichsmünze?

1 : 2 : : $\frac{9}{32}$: $\frac{13}{32}$ oder $\frac{9}{16}$ eines Pfennigs.

Bey Matthäus am 18. Kapitel heißt es, ein Knecht sey seinem Herrn 10000 Talente schuldig gewesen. Wieviel beträgt diese Schuld in der Reichsmünze, wenn es Talente im

Silber:

Silber: wieviel, wenn es Talente im Golde gewesen?

1 : 10000 : : 1500 : 15000000 Rchsthl.
1 : 10000 : : 18000 : 180000000 Rchsthl.

Elfter Abschnitt.

Von der zusammengesetzten Regel de Tri.

§. 92.

Im §. 87. ist angezeigt worden, daß die zusammengesetzte Regel de Tri in drey besondere Theile abgetheilt werden müsse; und daß die Regel von Fünfen oder de Quinque den ersten Theil ausmache. Bey Berechnung der Exempel nach dieser Regel von Fünfen ist zweyerley zu beobachten, nemlich

1) werden aus den gegebenen fünf Gliedern drey Glieder, die zusammengehören, in eine Proportion gebracht, und hiezu das vierte Glied berechnet. Alsdenn setzt man dieses gefundene vierte Glied mit den beyden übrigen gegebenen in eine andere Proportion, und sucht hiezu wieder das vierte Glied. Oder

2) multiplicire man von den fünf gegebenen Gliedern zwey Glieder von einerley Benennung mit zwey andern ebenfalls von einerley Benennung, doch so, daß beyde Factoren sich

sich aufeinander als Ursachen und ihre Wirkungen beziehen: alsdenn setze man diese beyde Producte mit den übrigen gegebenen Gliedern in eine Proportion, suche hiezu das vierte Glied, so ist solches das Facit.

Hierauf gründet sich die allgemeine Regel, wie die Exempel nach der Regel de Quinque angesetzt werden müssen; nemlich

Man setze beyde Fragzahlen am Ende untereinander, dasjenige, was mit dem gesuchten von einerley Art ist, in die Mitte, und die beyden übrigen Zahlen vorne an untereinander. Die beyden Fragzahlen sowohl, als die beyden ersten Zahlen in der ersten Stelle multiplicire man in einander, so bekömmt man drey Zahlen, mit welchen man nach der ordentlichen Regel de Tri verfahren kann.

Einige Exempel werden diese Regel besser erläutern, als alle weitläufige Erklärung.

1) Exempel der geraden oder direkten Regel von Fünfen.

1) Ein Fuhrmann empfängt für 12 Zentner auf 10 Meilen fl. 5 Fracht oder Führlohn: wieviel muß er bekommen, wenn er 50 Ct. 24 Meilen weit führen muß? Antwort: fl. 50. —.

Nach

Nach der ersten Art.

10 Meilen : 24 Meilen = fl. 5 : fl. 12.
12 Cent. : 50 Cent. = fl. 12 : fl. 50.

Durch die erste Proportion wurde gefunden: wieviel Gulden Fracht für 24 Meilen bezahlt werden müsse, wenn 10 Meilen fl. 5. kosten. In der andern Portion aber wurde berechnet, wieviel für 50 Ct. Fuhrlohn bezahlt werden müßte, wenn für 12 Ct. fl. 12 Fracht bezahlt würden.

Nach der zweyten Art.

12 Ct. 50 Ct.
10 Meilen. 24 Meilen.

12 : 1200 = fl. 5 : fl. 50.

5

fl. 50 6000
60
0

2) Ein Capital von fl. 100 trägt in einem Jahr fl. 5 Zins; wieviel machen fl. 3000 in 6 Jahren Zinse? Antwort: 900—.

fl. Cap. fl. Cap. fl. Int. fl. Int.
100 : 3000 = 5 : 150

fl. 15000

Jahr Jahr fl. fl.
1 : 6 = 150 : 900
6

900

3) Eine Person verzehrt in 4 Wochen fl. 22. 36 kr. 3 hl. wieviel verzehren sechs Personen in einem Jahre? Antw. fl. 1763 46 kr. 2 Pfennige.

4) 200 Soldaten kosten monatlich zu unterhalten fl. 900—. Wieviel braucht man, um 1 Jahr lang 12000 Mann zu unterhalten? Antwort: fl. 648000.

Ein Stück Tapezerey, 8 Ellen lang, und 6 Ellen breit, wird mit 12 Gulden bezahlt. Wie hoch wird ein anderes dergleichen Stück kommen, das 20 Ellen lang, und 10 Ellen breit ist?

Der Werth des Tuchs ist die Wirkung; denn dieser wird durch die Breite und Länge desselben verursachet. Diese Aufgabe wird demnach aufgelöset werden, wie man sieht.

Länge		Breite		Gulden
8	:	6	:	12
20	:	10		

$8 \times 6 = 48$: : das erste Product

$20 \times 10 \times 12 = 2400$ das zweyte Product.

$\frac{2400}{48} = 50$ der verlangte Werth.

Da ein Gang in einer Mühle binnen 1 Tag 12 Scheffel mahlen kann; wieviel wird eine Mühle, die aus 18 Gängen besteht, in einem Jahre, das ist, in 365 Tagen Mehl liefern?

Die

Die Wirkung ist die Anzahl der Scheffel, welche gemahlen werden. Die Auflösung wird also diese seyn.

Gang	Tag	Scheffel
1 :	1 :	12
18 :	365	

$1 \times 1 = 1$ das erste Product

$12 \times 18 \times 365 = 78840$ das zweyte

$\frac{78840}{1} = 78840$ die verlangte Anzahl der Scheffel

Sechs Wägen mit Wein beladen, 9 Meilen weit zu führen, kosten 72 Gulden. Wie groß wird also der Unkosten seyn, wenn 27 dergleichen Wägen 15 Meilen weit sollen geführet werden?

Der Fuhrlohn, 72 Gulden ist die Wirkung: die Auflösung geschieht hiemit also.

Wägen	Meilen	Gulden
6 :	9 :	72
27 :	15	

$6 \times 9 = 54$ das erste Product

$27 \times 15 \times 72 = 29160$ das zweyte

$\frac{29160}{54} = 540$ der gesuchte Fuhrlohn.

Wenn einem jeden Soldaten monatlich 4 Gulden gereichet werden, wie groß wird der Aufwand für 4000 Soldaten in 4 Jahren seyn?

Soldat	Monat	Gulden
1 :	1 :	4
4000	48	

$1 \times 1 = 1$ das erste Product
$4000 \times 48 \times 4 = 868000$ das zweyte
$\frac{768000}{1} = 768000$ der gesuchte Aufwand

100 Soldaten verzehren in 3 Wochen 21 Centner Fleisch. Wie viele können mit 63 Centnern 5 Wochen lang erhalten werden?

Die Anzahl der Centner Fleisch, welche verzehret werden, ist die Wirkung. Die Auflösung wird demnach diese seyn:

Soldaten	Wochen	Centner
100 :	3 :	21
	5	63

$100 \times 3\,63 = 18900$ das erste Product
$5 \times 21 = 105$: : das zweyte
$\frac{18900}{105} = 180$ die gesuchte Anzahl der Soldaten

---

10 Schnitter schneiden in 5 Tagen 30 Jaucharte. Wenn nun 25 gedungen werden, wie bald werden sie mit 40 Jaucharten fertig seyn?

Die Anzahl der Jaucharten, die geschnitten werden, ist die Wirkung. Die Auflösung geht demnach also;

Schnit

Schnitter	Tage	Jaucharte
10 :	5 :	30
25 :		40

$10 \times 5 \times 40 = 2000$ das erste Product
$25 \times 30 = 750$ " das zweyte

$$\frac{2000}{7} = 2\tfrac{500}{750} = 2\tfrac{2}{3} \text{ Tage.}$$

Wenn eine gewisse Maaße Getreides um 96 Gulden gekauft wird, so müssen die Bäcker aus obrigkeitlichem Befehle ein 3 Pfunde schweres Brod um 12 Kreuzer geben. Wie schwer muß also ein Brod für 30 Kreuzer seyn, da eben selbe Maaße Getreides um 165 Gulden gekaufet wird?

Der Werth des Brodes ist die Wirkung. Die Auflösung wird hiemit diese seyn:

Gulden	Pfund	Kreuzer
96 :	3 :	12
165 :		30

$96 \times 3 \times 30 = 8640$ das erste Product
$165 \times 12 = 1980$ das zweyte

$$\frac{8640}{1980} = 4\tfrac{720}{1980} = 4\tfrac{4}{11} \text{ die gesuchte Schwere}$$

Eine Stadt, in welcher 1000 Soldaten, ist mit 200 Fäßern Mehl auf 6 Monate genugsam versehen: es werden ihr aber noch 80 dergleichen Fäßer zugeschickt, zugleich aber der Befehl, soviel Besatzung noch dazu zu nehmen, daß sie auf 7 Monate versehen sey.

 Die

Die Wirkung ist die Anzahl der Fäßer Mehl, welches von den Soldaten verzehret wird.

Soldaten	Fäßer	Monate
1000 :	200 :	6
	280 :	7

$1000 \times 6 \times 280 = 1680000$ das erste Product
$200 \times 7 = 1400$ „ „

$\frac{1680000}{1400} = 1200.$ Die Anzahl der Soldaten, welche mit 280 Fäßern auf 7 Monate können erhalten werden. Die Stadt muß also noch 200 Mann einnehmen.

Wenn eine Mauer, die 20 Schuhe lang, 11 Schuhe hoch, und $2\frac{1}{2}$ Schuhe dick, 400 Reichsthaler zu stehen kömmt; was wird eine andere dergleichen kosten, welche 36 Schuhe lang, 15 hoch, und 3 dicke werden soll?

Die Wirkung ist der Werth der Mauer.

Länge	Höhe	Dicke	Reichsthaler
20	11	2,5	400
36	15	3	

$20 \times 11 \times 2{,}5 = 550$ das erste Product
$36 \times 15 \times 3 \times 400 = 648000$ das zweyte

$\frac{648000}{150} = 1178\frac{10}{53} = 1178\frac{2}{11}$ Reichsthl.

b) Exempel

b) Exempel der **umgekehrten Regel** von Fünfen.

1) In einem Tage können mit einem Pflug 2 Jauchert Acker umgepflüget werden, wie viel braucht man Pflüge, um in 6 Tagen 144 Morgen umzuackern? Antw. 12 Pflüge.

Tag		Tage		Morgen		Morgen
1	:	6	=	2	:	12
Morgen		Morgen		Pflug		Pflüge
12	:	144	=	1	:	12

Oder

Morgen		Morgen		Pflug		Pflüge
2	:	144	=	1	:	72
Tage		Tag		Pflüge		Pflüge
6	:	1	=	72	:	12

2) Man brauche für 200 Soldaten monatlich fl. 900 —. Nun frägt es sich, wie lange 12000 Mann Soldaten für fl. 648000 —. unterhalten werden können? Antwort: 12 Monate.

§. 91.

In der zusammengesetzten Regel de Tri ist nach §. 87. die **Kettenregel**, die Regel Multiplex, oder Conjointe die zweyte Unterabtheilung, und ist hiebey zu beobachten, daß die Exempel der Kettenregel auf die nemliche Art wie in der Regel von Fünfen berechnet werden, blos mit dem einigen Unterschied, daß

darinn mehr als zwey Proportionen gemacht, oder welches einerley ist, daß mehrere Paar Glieder derselben in einander multiplicirt werden müssen,

Regel, wie die zu der Kettenregel gehörige Exempel angesetzt werden müssen, ist folgende:

Oben an schreibe man zur rechten Hand die Fragzahl; linker Hand aber setze man von den gegebenen Zahlen diejenige, welche mit der Fragzahl von einerley Art ist; unter die Fragzahl rechter Hand diejenige Zahl, welche damit zu vergleichen ist: desgleichen zur linken Hand diejenige Zahl, so mit der nächst vorhergehenden Zahl zur rechten von einerley Art ist, und zur rechten Hand wiederum die dritte in der Aufgabe verbunden. Man fahre damit so lange fort, bis endlich zur rechten Hand eine Zahl kömmt, die mit der gesuchten von einerley Art ist.

a) Exempel der geraden Kettenregel.

1) Man umpflügt mit 2 Pflügen 9 Morgen Ackers in 3 Tagen, wenn des Tags 8 Stunden gepflüget werden; wie viel Land kann man mit 10 Pflügen in 6 Tagen umackern, wenn täglich 12 Stunden gepflügt wird? Antwort: 135 Morgen.

Nach

Nach der ersten Art.

2 Pflüge : 10 Pflüge = 9 Morgen : 45 Morgen
3 Tage : 6 Tage = 45 Morgen : 90 Morgen
8 Stund : 12 Stund = 90 Morgen : 135 Morg.

Nach der andern Art.

2 Pflüge 10 Pflüge
3 Tage 6 Tage
8 Stund 12 Stunden

48 : 720 = 9 Morgen : 135 Morgen

2) Hamburg sendet nach Leipzig 1000 Louisdor, welche in Leipzig 5 Rchsthl. gelten. Leipzig sendet die Valuta zurück à 135 p. C. im Hamburger Bo. Man fragt, wie viel Hamburg für diese 1000 Louisdor in Mark Bo. bekomme? Antw. 11111 $\frac{1}{9}$ Mark Bo.

1 Louisdor. 1000 Louisdor.
135 Thlr. in Leipz. 5 Thlr. in Leipz.
27
9. 1. Thlr. Bo. 100 Thlr. Bo.
3 Mark Bo.

Div. mit 9 | 100000
11111

11111 $\frac{1}{9}$ Mark Bo.

3) Ein Capital von 560 rth. à 5 p. C. beträgt in 2 Jhren 56 rh. Intereße; wieviel trägt ein Capital von 2520 rth. à 6 p. C. in 50 Jahren Intereßen? Antw. 756 rth.

560 Rchsthl.	2520 Rchsthl.
5 p. C.	5 p. C.
2 Jahr	5 Jahr

5600 : 75600 = 56 : 756 Rchsthl.

4) 7 Mk. 2 ß. courr. und die lagio von Bo. gegen courr. $18\frac{3}{4}$ p. C. wieviel Thlr. Bo. erhält man für 723 Ducaten? Antw. 1446 Thlr. Bo.

Anmerkung.

Wenn Brüche, wie in diesem Exempel vorkommen, so schaft man dieselbe weg, und setzt:

1 Duc. giebt $7\frac{1}{8}$ Mk. courr.
folglich 8 Duc. geben 57 Mk. courr.

Weiter 100 Mk. Bo. geben $118\frac{3}{4}$ Mk. courr. folglich 400 Mk. Bo. geben 475 Mk. courr.

Folglich kömmt die Berechnung zu stehen, wie folgt:

1	10
8 Duc.	57 Mk. courr.
95. 10	50
475 Mk. courr.	400 Mk. Bo.
	2
2 Mk. Bo.	1 Thlr. Bo.
1	
	723 Duc.
	2
	1446 Thlr. Bo.

b) Exempel

b) Exempel der **umgekehrten Kettenregel.**

1) Man kann mit 2 Pflügen in 3 Tagen 9 Morgen Acker umpflügen, wenn täglich 8 Stunden geackert wird. Wieviel Pflüge werden gebraucht, wenn man 135 Morgen Aecker in 6 Tagen und des Tags 12 Stunden umackern soll? Antw. 5 Pflüge.

1	15
~~9~~ Morgen	~~135~~ Morgen
2	
~~6~~ Tage	~~3~~ Tage
3	1
~~12~~ Stunden	~~8~~ Stunden
6 :	30 = 5 Pflüge.

§. 92.

Die nach §. 87. bestimmte dritte Abtheilung der zusammengesetzten Regel de Tri ist die Gesellschafts-Rechnung, worinn Gewinn und Verlust unter mehreren nach dem Verhältniß dessen, was sie zusammengeschossen haben, getheilt wird.

§. 93.

Bey der **eigentlichen Gesellschafts-Rechnung** überhaupt sind folgende drey Punkte wohl in Acht zu nehmen, als:

1) daß

1) daß man die zusammengelegten Gelder oder andere Sachen in eine Summe bringe;

2) diese Summe mit den eingelegten eines jeden von der Gesellschaft und dem Gewinn, oder Verluste in so viele Proportionen bringe, als Personen zu der Gesellschaft gehören; und endlich

3) das vierte Glied in einer jeden dieser Proportionen suche.

§. 94.

Bey der Gesellschafts-Rechnung insbesondere ist zu beobachten:

a) die einfache Gesellschafts-Rechnung, worinn bey den Eingelegten keine verschiedene Zeiten bestimmt werden; und

b) die doppelte Gesellschafts-Rechnung, wenn bey den Eingelegten verschiedene Zeiten angegeben werden, welche Zeiten man vorher mit dem Eingelegten, als worauf sie sich beziehen, multipliciren muß.

Exempel der einfachen Gesellschafts-Rechnung.

1) Drey Kaufleute, ihre Namen sollen A, B und C seyn, schießen ein Capital zusammen. A giebt fl. 300 —. B giebt fl. 500 —. und C giebt fl. 800 dazu her. Sie gewinnen mit diesem Gelde fl. 160 —. Wie groß ist eines jeden Gewinn?

Man

Man addire das zusammengeschossene Geld, so ist die Summe fl. 1600 —. Nun suche man nach der Regel de Tri, indem man die Summe für das erste Glied; die Summe der Einlage eines jeden für das zweyte Glied; den ganzen Gewinn für das dritte Glied annimmt, den Gewinn eines jeden; so giebt das vierte Glied solchen an. Hieraus entspringen folgende drey Proportionen: als

1600 : 300 = 160 : 30 Gewinn des A.
1600 : 500 = 160 : 50 Gewinn des B.
1600 : 800 = 160 : 80 Gewinn des C.

2) Es tretten drey Personen in eine Compagnie, der erste A giebt 7200 rth. der andere B giebt 5600 rth. und der dritte C giebt 5600 rth. Mit diesem Gelde gewinnen sie 4700 rth. wieviel bekömmt ein jeder von dem Gewinn? Antwort: A erhält 2160 rh. B 1680 rth. und C 1920 rth.

3) Vier Metzger vermiethen eine Wiese um fl. 120 —. und weiden auf derselben ihre Schafe. Einer davon hat 72 Stück; der andere 64 Stück; der dritte 48 Stück, und der vierte 30 Stück. Wieviel hat jeder an dem Zins zu bezahlen? Antwort: Der erste fl. 40. 22 kr. $3\frac{47}{107}$ hl. der andere fl. 35. 53 kr. $2\frac{18}{107}$ hl. der dritte fl. 26. 54 kr. $7\frac{67}{107}$ hl. und der vierte fl. 16. 49 kr. $2\frac{82}{107}$ hl.

Exempel der **gedoppelten** Gesellschafts-Rechnung.

1) Drey

1) Drey Kaufleute legen eine gewiße Summe zusammen. Der erste A giebt fl. 800 —. auf vier Monate, der andere B giebt fl. 600 auf 6 Monate, und der dritte C fl. 200 auf drey Monate. Ihr Gewinn beträgt fl. 150; wieviel beträgt eines jeden Gewinn?

$$800 \times 4 = 3200$$
$$600 \times 6 = 3600$$
$$200 \times 3 = 600$$

Summe 4700

$7400 : 3200 = 150 : 64\frac{32}{37}$ Gewinn des A.
$7400 : 3600 = 150 : 72\frac{36}{37}$ Gewinn des B.
$7400 : 600 = 150 : 12\frac{6}{37}$ Gewinn des C.

So wie der Gewinn, eben so wird auch der Verlust gerechnet:

2) Vier Kaufleute nemlich A, B, C, und D befanden sich auf einem Schiff, als plötzlich sich ein Sturm erhob, und der erste Kaufmann A genöthigt wurde, seine Güther, die auf 1000 rth. geschätzt wurden, zur Erleichterung des Schiffes in das Meer zu werfen. Des zweyten B durch die Erleichterung des Schiffes erhaltene Güther belaufen sich auf 4000 rth. des dritten C auf 6400 rth. und des vierten D auf 5600 rth. Der Eigenthümer des Schiffes E giebt seinen Werth auf 3000 rth. an. Wieviel muß ein jeder von den letzten Vieren dem ersten A geben, und wieviel muß dieser selbst einbüßen.

Man

Man addire alle Einlagen in eine Summe: so ist solche 20000 rth. Der allgemeine Verlust belauft sich auf 1000 rth. Nun sage man, wie die Summe aller Einlagen, zu der Einlage eines jeden, so verhält sich der allgemeine Verlust zu dem sonderheitlichen Verlust eines jeden.

Man bekömmt alsdenn folgende fünf Proportionen:

20000 : 1000 = 1000 : 50 Verlust des ersten A.
20000 : 4000 = 1000 : 200 Verl. des zweyten B.
20000 : 6400 = 1000 : 320 Verl. des dritten C.
20000 : 5600 = 1000 : 280 Verl. des vierten D.
20000 : 3000 = 1000 : 150 Verl. des fünften E.
des Schiffherrn.

§. 95.

Nachdem die Berechnungsarten der Gesellschafts-Regel sowohl überhaupt als insbesondere in den beeden vorhergehenden Paragraphen gelehrt worden, so ist auch itzt noch zu zeigen übrig, wie die erste Unterabtheilung der Gesellschafts-Rechnung nemlich die **Vermischungs-Rechnung** berechnet werden müsse, und ist hiebey weiter nichts zu beobachten, weil die Exempel auf die vorhin beschriebene Art gerechnet werden, als daß man die Gewichte oder Werthe der einzelnen Materien, die zu vermischen sind, als etwas eingelegtes, und eine gegebene Menge oder Größe des vermischten als ein Gewinn oder Verlust betrachte.

Zum

Zum Exempel.

1) Zum Schießpulver wird auf 1 ℔. Salpeter 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel erfordert; wieviel muß man von jeder dieser einzeln Materie nehmen, wenn man 50 ℔. Pulver machen will.

Salpeter	32	Loth
Kohlen	6	Loth
Schwefel	4	Loth
Summe	42	

$42 : 32 = 50 : 38\frac{2}{21}$ ℔. Salpeter

$42 : 6 = 50 : 7\frac{3}{21}$ ℔. Kohlen

$42 : 4 = 50 : 4\frac{16}{21}$ ℔. Schwefel.

Die Goldschmiede und Silberarbeiter nennen den Tiegel beschicken, wenn man ein gewißes Gewicht Gold oder Silber von verlangtem Gehalt zuwege bringen soll, und die Frage ist, wieviel von jeder Art des Silbers oder Goldes auch andern Metalles dazu erfordert werde.

2) Ein Goldschmied hat $37\frac{1}{2}$ Mk. $14\frac{1}{2}$ löthiges Silber, und will dasselbe mit einem 9 löthigen Silber beschicken, damit es $12\frac{1}{2}$ löthig werde. Wieviel muß er zu jenen $37\frac{1}{2}$ Mk. von diesem andern Silber zusetzen?

$$12\tfrac{1}{2}\quad \begin{array}{c|c|c} 14\tfrac{1}{2} & 3\tfrac{1}{2} & 7 \\ 9 & 2 & 4 \end{array}$$

$$7 : 4 = 37\tfrac{1}{2}\text{ Mk} : \frac{4 \times 37\tfrac{1}{2}\text{ Mk.}}{7}$$

Dieß

Dieß giebt den Zusatz $21\frac{3}{7}$ Mk.

Probe.

$37\frac{1}{2}$ Mk.	à	$14\frac{1}{2}$ L.	fein	thut	$543\frac{3}{4}$ L.
$21\frac{3}{7}$ Mk.	à	9 L.	fein	thut	$192\frac{6}{7}$ L.
$58\frac{13}{14}$					$736\frac{17}{28}$

Folglich kommt $\frac{736\frac{17}{28}}{58\frac{13}{14}} = 12\frac{1}{2}$ Mk. für 1 Mk. des Gemischten.

Hieraus folgt die gemeine Regel:

Man schreibe den bessern und schlechtern Preis unter einander, und den verlangten mittlern Preis zur Linken. Zur Rechten setze man bey dem bessern Preis den Unterschied des schlechtern vom mittlern, und beym schlechtern Preis den Unterschied des bessern vom mittlern: so zeigen diese Differenzen das Verhältniß der Theile, so man sucht, an.

§. 96.

Die **Verbindungs-Regel** ist diejenige Vermischungs-Rechnung, in welcher man verschiedene Weine, Getränke u. d. gl. untereinander zu mischen lehrt. Es giebt zwo Gattungen dieser Regel; die eine heißt die **mittlere**, die andere hingegen die **wechslende**.

§. 97.

In der **mittlern Verbindungs-Regel** sucht man den Werth einer gewißen Maaße

der ganzen Mischung aus der sonderheitlichen Maaßen und Werthen der Sachen, welche vermischt worden sind: und die Rechnung wird auf folgende Art verrichtet:

Man addire alles, was untereinander soll vermischt werden, in eine Summe, wie auch alle sonderheitliche Werthe in eine andere Summe. Alsdenn sage man: wie sich verhält die erste Summe zu der andern Summe, so verhält sich eine gewiße Maaße der Vermischung zu ihrem Werth.

§. 98.

Die wechselnde Verbindungs-Regel hat drey verschiedene Fälle: als

Erster Fall. Man giebt den Werth einer gewißen Maaße einer jeden Sache, die in die Mischung kommen soll: man giebt auch den Werth der nemlichen Maaße der Mischung. Man sucht daraus, wieviel von einer jeden Sache in die Mischung kommen müße.

Zweyter Fall. Wenn die Werthe aller Sachen, welche untereinander gemischt werden sollen, der Werth der ganzen Mischung und überdas die Maaße einer Sache, die in die Mischung kömmt, gegeben sind, zu finden, wieviel von allen übrigen Sachen in die Mischung kommen muß.

Dritter Fall. Wenn der Werth der Mischung, die Werthe der zuvermischenden Dinge,

und

und noch dazu die Maaße der ganzen Mischung gegeben sind, die Maaße finden für jede Sache, die in die Mischung kommen soll.

Exempel von der mittleren Verbindungs-Regel.

Es sollen 15 Schaff Waizen mit 12 Schaff Roggen vermischt werden. Das Schaff Waizen kostet fl. 7. —. Das Schaff Roggen fl. 5. —. Wieviel wird ein Schaff des vermischten Getraides werth seyn?

Man addire 15 zu 12, so ist die Summe 27. Multiplicire man 15 mit 7, so ist das Product 105, der Werth des Waizens, der in die Mischung kömmt. Man multiplicire 12 mit 5, so ist 60 das Product des Werths des Roggens, der in die Mischung kömmt. Addirt man beyde Producte, so ist die Summe 165 der Werth aller Sachen, welche vermenget werden. Nun sage man: $27 : 165 = 1 : 6\frac{1}{9}$. Dieses ist der Werth eines gemischten Schaffes.

Exempel von der wechselnden Verbindungs-Regel auf den ersten Fall.

Ein Weinwirth hat viererley Wein, welche er untereinander mischen will. Die Maas des erstern kostet 20 kr. die Maas des zweyten 18 kr die Maas des dritten 10 kr. und die Maas des vierten 11 kr. Wieviel muß er von jedem

Wein nehmen, daß eine gemischte Maas 15 kr. ist.

Man vergleiche erstens den um 20 kr. und den um 11 kr. mit dem mittlern um 15 kr. der Mischung; wie folgt:

15	20	15 — 11 = 4
	11	20 — 15 = 5

Zweytens vergleiche man den um 18 kr. und den um 10 kr. mit dem mittleren Werth 15 kr. der Mischung;

15	18	15 — 10 = 5
	10	18 — 15 = 3

woraus folgt: daß von dem Wein zu 20 kr. 4 Maas; von dem um 11 kr. 5 Maas; von dem um 18 kr. 5 Maas; und endlich von dem um 10 kr. 3 Maas genommen werden müssen, um eine Maas der Mischung, so 15 kr. werth seyn soll, zu bekommen.

Exempel für den zweyten Fall.

Wieviel Weine, dessen eine Maas 60 kr. gilt, muß unter 12 Maas eines andern Weines geschüttet werden, dessen eine Maas 42 kr. kostet, damit eine Maas der Mischung 52 kr. werth sey?

Nach der vorhergehenden Auflösung würde das Exempel stehen:

der

der mittlere Werth 52 | 60 | 52 — 42 = 10
| 42 | 60 — 52 = 8

Nun sage man: wie sich die Maas, welche man durch die genommene Differenzen für jene Sachen genommen hat, deren Maas schon vorher gegeben war, verhält zu eben dieser gegebenen Maas; so verhält sich die Maas, welche man für die andere Differenzen gefunden hat, zu dem wahren Maas eben dieser Sache: die Proportion muß also stehen;

8 : 12 = 10 : 15 dem verlangten Maas des bessern Weines.

Exempel auf den dritten Fall.

Man soll einen Wein, davon eine Maas 60 kr. gilt, mit einem andern Wein, dessen eine Maas 42 kr. kostet, so vermischen, daß die ganze Mischung 27 Maas ausmacht, und eine Maas dieser Mischung 52 kr. Werth sey. Wieviel muß man von einem jeden nehmen?

Der mittlere Werth der Mischung 52 | 60 | 52 — 42 = 10
| 42 | 60 — 52 = 8

die Summe = 18

Nun sage man 18 : 27 = 10 : 15
und 18 : 27 = 8 : 12

Von dem bessern müssen also 15 Maas, vom schlechtern hingegen 12 Maas genommen

 werden:

werden: so ist die ganze Mischung 27 Maas, und eine Maas ist 52 kr. werth.

§. 99.

Die Falsi-Rechnung, welche nach §. 88. die zweyte Unterabtheilung der Gesellschafts-Rechnung ist, wird auf eben die Weise, wie die eigentliche Gesellschafts-Rechnung gerechnet, wenn nur statt der unbekannten Größe des Eingelegten, Zahlen gesetzt werden, welche gegeneinander die gegebenen Verhältniße haben.

Zum Exempel.

Es soll ein Gewinn von fl. 200 —. unter drey Kaufleute getheilt werden; davon der eine zu der Summe, daraus dieser Gewinn entstanden, soviel als die beyden andern zusammen: der andere aber noch einmal soviel als der dritte gegeben, wieviel bekömmt ein jeder?

Man nehme zuerst drey willkührliche Zahlen an, welche die gegebenen Verhältniße des Eingelegten gegeneinander haben, davon nemlich die erste so groß ist, als die beyden andern zusammen genommen, und die andere noch einmal so groß als die dritte, z. Ex. 3, 2, 1, oder 6, 4, 2, oder 30, 20, 10. Diese Zahlen zeigen die Verhältniß an, nach welchen der Gewinn getheilt werden muß. Denn die erste ist so groß, als die beyden andern

zusam-

zusammen; die andern aber noch einmal so groß, als die dritte. Daher kann man dieselbe eben so gut, als ob man wüßte, wieviel ein jeder wirklich eingelegt hat, brauchen, um die gehörigen Theile des Gewinnes nach obigen Regeln zu finden. Die Rechnung ist also:

Angenommene Einlage	des ersten	= 3
	des zweyten	= 2
	des dritten	= 1
	Summe	= 6

6 : 3 = fl. 200 : fl. 100 Gewinn des ersten
6 : 2 = fl. 200 : fl. 66$\frac{2}{3}$ Gewinn des zweyt.
6 : 1 = fl. 200 : fl. 33$\frac{1}{3}$ Gewinn des dritten

2) Einer hat ein Stück Tuch; davon verkauft er $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{8}$ behält noch 2 Ellen übrig, ist die Frage, wieviel das ganze Stück gehalten? Antwort: 48 Ellen.

3) Es fragt einer den andern, wie weit Augsburg von Venedig liege; der giebt zur Antwort: wenn es noch so weit, halb so weit, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{8}$ so weit wäre, und 5 Meilen dazu, so wären es gerade 212 Meilen; frägt sich demnach, wie weit beyde Städte von einander liegen? Antwort: 72 Meilen.

Zwölfter Abschnitt.

Von den Quadratzahlen und von Ausziehung der Quadratwurzel.

§. 100.

Wenn man eine Zahl in sich selbst multiplicirt, so nennt man das herausgekommene Product eine Quadratzahl; die Zahl aber, welche in oder mit sich selbst multiplicirt worden ist, heißt die Quadratwurzel.

§. 101.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo man den Inhalt eines Quadrats findet, wenn man die Seite desselben mit sich selbst multiplicirt.

§. 102.

Die Quadratzahlen der natürlichen Zahlen lassen sich aus folgendem Wurzeltäfelein leicht einsehen, als

Wurzel.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quadratzahl.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

Hieraus folgt, daß die Quadratzahl einer einfachen Zahl aus mehr nicht als zweyen Ziffern bestehen könne, weil die Quadratzahl von 10 als der kleinsten doppelten Zahl schon aus

aus drey Ziffern besteht; weil nemlich das Quadrat von 10 schon 100 ausmacht; aus gleichem Grunde kann die Quadratzahl von zwey Zahlen nicht mehr denn vier Ziffern in sich enthalten, weil 100 schon 10000 im Quadrat hat, u. s. w.

§. 103.

Die Quadratwurzel aus einer gegebenen Quadratzahl ausziehen, heißt nichts anders, als diejenige Zahl finden, die durch sich selbst multiplicirt die gegebene Quadratzahl ausmacht.

Zum Exempel.

Es soll aus der Quadratzahl 16 die Quadratwurzel ausgezogen werden, das heißt, man soll diejenige Zahl finden, die in sich selbst multiplicirt 16 hervorbringt.

§. 104.

Die Quadratzahl, deren Wurzel aus zwey Theilen besteht, enthält in sich,

1) das Quadrat des ersten Theils,
2) das Quadrat des zweyten Theils, und
3) das doppelte Product aus dem ersten Theile in den zweyten Theil.

Zum Exempel.

Es sey die Wurzel 25 oder 20 + 5. Multiplicirt man nun jeden Theil durch beyde,

so erhält man in dem Product das Quadrat des ersten Theils, und das doppelte Product des ersten im zweyten, und endlich das Quadrat des zweyten Theils.

$$\begin{array}{l} \quad 20 + 5 \\ \quad 20 + 5 \\ \hline 400 + 100 \\ \qquad + 100 + 25 \\ \hline 400 + 200 + 25 = 625, \end{array}$$

welches die Quadratzahl von 25 ist.

Eben dieser Satz läßt sich auch anwenden, wenn man eine einfache Zahl in zwey andere zerfällt.

Zum Exempel.

Es sey die Zahl 5 gegeben. Man theile dieselbe in zween Theile, etwa in 3 und 2. Das Quadrat von 5, nemlich 25 hält in sich das Quadrat des ersten Theils, nemlich 9: das Quadrat des zweyten Theils, nemlich 4, und das doppelte Product aus 3 × 2, nemlich 12: denn 9 + 4 + 12 = 25.

§. 105.

Besteht die Wurzel aus mehr als zwey Zahlen, so kann man die ersten zwey oder mehrere derselben als eine ansehen, und es wird alsbald klar, daß jedes Quadrat die Quadrate aller Theile der Wurzel, und die Producte aus jedem Theile zweymal genom-

men

men in alle die übrigen, so vor ihm gegen die linke Hand stehen, in sich enthalten.

§. 106.

Aus einer gegebenen Quadratzahl die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung.

Man theile 1) die gegebene Quadratzahl von der rechten Hand gegen die linke Hand in Klassen, und gebe jeder Klaße zwey Ziffern; denn soviel Theile hat die Wurzel, als Klaßen herauskommen. In der letzten Klaße gegen die linke Hand kann auch eine Ziffer stehen.

2) Das größte Quadrat, so in der ersten Klaße enthalten ist, ziehe man von der ersten Klaße ab; die Wurzel aber schreibe man zur Seiten, als den ersten Theil der verlangten Quadratwurzel, hinter die Quadratzahl.

3) Zu dem Reste, so nach der Subtraction geblieben ist, setze man die nächstfolgende Klaße. Den ersten schon gefundenen Theil der Quadratwurzel multiplicire man mit 2. Hierauf dividire man den gebliebenen Rest sammt der angehängten zweyten Klaße, doch so, daß man die letzte Ziffer derselben niemal zum Dividendus rechne. Den Quotienten schreibe man zur Seite als den zweyten Theil der gesuchten Wurzel, wie auch zur rechten Hand neben den Divisor.

4) Mul-

4) Multiplicire man den Divisor nebst dem angehängten zweyten Theile der Wurzel durch eben diesen zweyten Theil, und das Product ziehe man von der zweyten Klaße ab. Bleibt

5) ein Rest, so setze man zu demselben die dritte Klaße, und wiederhole man alles vorgesagte; und dieses so lange, bis keine Klaße mehr herabzusetzen übrig ist.

Zum Exempel.

Man soll die Quadratwurzel von 1764 finden.

Man theile diese Zahl in zwo Klaßen ab, indem man nach den zweyen Zahlen 64 einen Strich macht. Man suche hierauf in dem Wurzeltäfelein das Quadrat, welches der ersten Klaße 17 entweder gleich ist, oder doch am nächsten kommt; so wird man 16 finden. Diese Quadratzahl schreibe man unter die erste Klaße. Die darüber stehende Wurzel 4 schreibe man hinter einen aufrecht gezogenen Strich, als den ersten Theil der Wurzel. Unter 16 ziehe man einen Querstrich; subtrahire 16 von 17, und setze den Rest 1 unter den gezogenen Querstrich. Neben diesen Rest setze man die folgende Klaße, so hat man 164. Hierauf multiplicire man den ersten Theil der Wurzel mit 2, und das Poduct 8 schreibe man unter die Ziffer 6. Alsdenn

dividire

dividire man 16 durch 8; den Quotienten 2 schreibe man neben den vorerst gefundenen ersten Theil der Wurzel, wie auch neben 8, hieraus entsteht 82. Dieses multiplicire man durch den andern Theil, nemlich durch 2, so giebt das Product 164. Zieht man dieses von 164 ab, so bleibt nichts übrig: folglich ist 42 die Quadratwurzel der gegebenen Zahl 1764, und die ganze Rechnung steht, wie folgt:

17	64.	$\sqrt{42}$
16		
1	64	
	82	
1	64	
·	0·	

Ein anders Exempel.

Man soll die Quadratwurzel aus der Zahl 20449 ausziehen. Nach gemachter Eintheilung steht die gegebene Zahl also: 2. 04. 49. Die erste Klasse 2 findet man nicht unter den Quadratzahlen. Das nächste kleinere Quadrat ist 1; man schreibe also dieses unter die erste Klasse 2. Die Wurzel davon, welche ebenfalls 1 ist, schreibe man hinter den ersten Theil der Wurzel, wie man unten sieht. Ziehe man 1 von 2 ab: neben dem Reste 1 setze man die nächste Klasse: hieraus entsteht 104. Den gefundenen ersten Theil der Wurzel

zel

zel multiplicire man mit 2: das Product 2 schreibe man unter die 0. Dividire man 10 durch 2. Nun ist 2 in 10 zwar 5mal enthalten: wenn man aber diesen Quotient als den zweyten Theil der Wurzel annimmt, und neben den Divisor 3 schreibt, so entsteht 25, und so man dieses durch diesen zweyten Theil der Wurzel 5 multiplicirt, so erhält man das Product 125, welches größer ist, als daß man es von der zweyten Klasse abziehen könnte. Man erkennt also, daß 5 zu groß ist, und man nur 4 als den andern Theil der Wurzel annehmen müsse: schreibe man also 4 neben den zuvor gefundenen ersten Theile der Wurzel, wie auch neben den Divisor 2. Man bekommt also 24. Dieses multiplicire man durch 4: das Product 96 ziehe man von 104 ab: zu dem Reste 8 setze man die noch übrige dritte Klasse. Hieraus entsteht 849. Multiplicire man beyde bisher gefundene Zahlen der Wurzel, nemlich 14 durch 2. Das Product 28 schreibe man unter 849 so, daß die letzte Ziffer 9 leer bleibe. Dividire man 84 durch 28, und sage: 2 in 8 ist 4mal enthalten. Aber wenn man dieses als den dritten Theil der Wurzel nimmt, und auf die vorgeschriebene Art fortfährt, so bekommt man ein Product, das man nicht abziehen kann. Man erkennt also, 4 sey zu groß, und schreibe 3 als den dritten Theil der Wurzel neben die zwo vorigen Wurzelzahlen, wie auch neben den Divisor 28. Hieraus entsteht 283: wenn

man

man dieses mit 3 multipliciret, und das Product 849 abzieht, bleibt nichts übrig. Also ist 143 die gesuchte Wurzel. Hier sieht man die ganze Bearbeitung.

```
2. 04. 49 (143
1
―――――――――
  104
   24
   96
―――――――――
  849
  283
  849
―――――――――
    0
```

§. 107.

Die Ursache dieser Regel muß aus dem, was oben ist gesagt worden, hergeleitet werden. Ich will es in dem ersten oben stehenden Exempel, soviel es seyn kann, erklären. In der ersten Klasse 17 ist das Quadrat des ersten Theils der Wurzel enthalten, und noch etwas weniges darüber: die Wurzel des größten Quadrats, welches von dieser ersten Klasse abgezogen werden kann, ist also der erste Theil der verlangten Wurzel. Und wenn man das Quadrat selbst von der ersten Klasse abzieht, so muß in dem Reste sammt der dazu gesetzten zweyten Klasse das Product aus dem doppelten ersten Theile durch den zweyten, und überdas das Quadrat des zweyten Theils verbor-

gen liegen. Nun steckt das Quadrat des zweyten Theils in der letzten Ziffer. Das doppelte Produkt steckt also in den zweyen ersten. Man muß also diese zwey ersten Ziffern durch den doppelten ersten Theil dividiren, und alsdenn muß der Quotient den zweyten Theil geben. Denn, wenn ein Product, das aus zwoen durch einander multiplicirten Zahlen entstanden ist, durch eine derselben dividirt wird, so muß der Quotient allezeit die andere geben.

Anmerkung.

Wenn es sich zuträgt, daß ein Rest sammt der angehängten neuen Klasse das doppelte der zuvor gefundenen Wurzel niemal in sich begreift, ohne die letzte Ziffer dieser neuen Klasse dazu zu nehmen, so muß gleich eine 0 in die Wurzel geschrieben, und auch die nächstfolgende Klasse herabgesetzt werden. Man sehe hier ein Exempel:

```
4. 12. 09 (203
4.
------
01209
  403
 1209
------
   0
```

Hier sind noch einige Exempel zur Uebung.

18.19.02.25 (4265 16 219 82 164 5502 846 5076 42625 8525 42625 0	38.93.76 (62.. 36 293 122 244 4976 1244 4976 0

1.01.20.36 (1006
1
0012036
2006
12036
0

§. 108.

Wenn, nachdem man die letzte Klaße schon herabgesetzt hat, nach der Abziehung ein Rest überbleibt, so hat die gegebene Zahl keine genaue Quadratwurzel: jedoch kann man derselben so nahe kommen, als immer beliebig ist; indem man allezeit zum Reste zwo Nullen setzt, und neue Ziffern für die Wurzel zu

 suchen

suchen fortfährt, welche alsdenn Decimalzahlen sind, und also von den Ganzen durch ein Strichlein müssen abgesondert werden.

Zum Exempel.

38. 94. 89 (624,0905
36
294
122
244
5089
1244
4976
11300
1248
1130000
124809
1123281
671900
124818
67190000
12481805
62409025
4780975 u. s. f.

§. 109.

Die Probe, ob richtig gerechnet worden, anzustellen, muß man die gefundene Wurzel durch sich selbst multipiciren. Zu dem Producte

ducte addire man den Rest, wenn am Ende der Rechnung einer geblieben ist. Kommt die vorgegebene Quadratzahl heraus, so ist die Rechnung richtig.

§. 100.

Bey Ausziehung der Quadratwurzel aus einem vorgegebenen Bruch ist weiter nichts zu erinnern, als daß sowohl aus dem Nenner als Zähler die Quadratwurzel ausgezogen werden müsse.

§. 111.

Es sind zwey Circel gegeben. Der Durchmeßer des einen hat 5 Zoll; der Durchmeßer des andern hingegen 10. Die Quadratfläche des erstern hält 19,635 Quadratzolle: wie groß wird die Quadratfläche des andern Circels seyn?

Auflößung.

Es ist aus der Geometrie bekannt, daß die Circelflächen sich gegen einander verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmeßer: daher stelle man die Proportion folgendermaßen an: wie sich das Quadrat 25 von 5 zu dem Quadrat 100 von 10 verhält, so verhält sich die Fläche des ersten Circels zur Fläche des andern Circels.

25 : 100 = 19,635 : 78,54 Quadratzolle.

§. 112.

Die Magdeburgischen Halbkugeln, deren Durchmesser 1 Schuh oder 12 Zolle groß ist, halten, nachdem die Luft rein ist herausgezogen worden, mit einer Gewalt von 1715 Pfunden zusammen: wie stark werden zwo andere Halbkugeln zusammenhalten, derer Durchmesser 8 Zolle hat?

Die Kraft, mit welcher dergleichen Kugeln zusammenhalten, verhält sich, wie ihre Cirkelflächen; und diese verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Durchmesser. Man stelle also diese Proportion an. Wie sich das Quadrat von 12, das ist 144, verhält zum Quadrat von 8, das ist, zu 64, so verhalten sich 1715 Pfunde zur Gewalt, mit welcher die Halbkugeln von 8 Zollen im Durchmesser zusammen halten.

144 : 64 : : 1715 : 762 Pfunde beynahe.

Wenn also zwo dergleichen Magdeburgische Halbkugeln vorgewiesen werden, so kann man alsogleich durch die Rechnung bestimmen, wie groß die Kraft seyn werde, mit der sie nach herausgezogener Luft zusammenhalten. Man darf nemlich nur erforschen, wie groß ihr Durchmesser sey. Ist dieser bekannt, so kann man aus der schon vorhin bekannten Kraft, mit welcher die Halbkugeln von einem Schuh im Durchmesser zusammenhangen, die Kraft, mit der die vorgelegten

zusam-

zusammengedrückt werden, auf eben erklärte Art bestimmen.

§. 113.

Ein Stein oder anderer Körper, wenn er freygelassen wird, fällt mit solcher Geschwindigkeit, daß er innerhalb 1 Secunde 181 Zolle durchläuft. Nun aber ist aus der Naturlehre bekannt, daß die Raume, welche von frey herabfallenden Körpern durchlaufen werden, sich wie die Quadrate der Zeiten verhalten, durch welche die Bewegung dauert. Man fragt also: wie weit ein solcher Stein kommen würde, wenn er 2 und $\frac{1}{2}$ Stunden oder 9000 Secunden lang fallen sollte. Folglich wie sich das Quadrat von 1 zum Quadrate von 9000 verhält, so verhalten sich 181 Zolle zum gesuchten Raume, den ein solcher Körper innerhalb $2\frac{1}{2}$ Stunden durchlaufen würde.

1 : 81000000 : : 181 : 14661000000 Zolle.

Wenn man nun diese in Schuhe verändert, so findet man 1221750000: dividirt man diese Zahl durch 20000, weil eine deutsche Meile 20000 Schuhe in sich begreift, so bekommt man $61087\frac{1}{2}$ Meilen. Weil nun der Mond nicht mehr dann 46440 deutsche Meilen von uns entfernt ist, so folgt, daß, wenn ein Stein $2\frac{1}{2}$ Stunden lang frey fallen sollte, er einen größern Raum durchlaufen

 würde,

würde, als die Entfernung des Mondes von unsrer Erde ist.

§. 114.

Das Licht, so von einem Körper ausfährt, wird immer schwächer, je größer die Entfernung von selbem Körper wird. Ja es ist ein in der Weltweisheit erwiesener Satz, daß die Stärke des Lichts jederzeit abnehme, wie das Quadrat der Entfernung wächst. Nun wird folgende Frage gestellt. Durch zwo angezündete Kerzen wird ein gewisses Bild genugsam erleuchtet, daß man es in der Entfernung von 5 Schuhen klar und deutlich sehen kann: wie viel dergleichen Kerzen müssen angezündet werden, daß eben dieses Bild in der Entfernung von 15 Schuhen eben so hell in die Augen falle? Man sage: Wie sich das Quadrat von 5 verhält zum Quadrate von 15, so verhalten sich 2 Kerzen zur gesuchten Anzahl.

25 : 225 : : 2 : 18.

§. 115.

69696 Mann sollen ins Gevierte gestellet werden, wie viel Mann werden in eine Reihe kommen? Man ziehe die Quadratwurzel aus 69696: so findet man 264.

§. 116.

Ein großes Quadratfeld hält 760384 Quadratschuhe, wie lang ist eine jede Seite von diesem Felde? Antwort. 872 Schuhe.

Dreyzehnter Abschnitt.

Von den Cubiczahlen und Ausziehung der Cubicwurzel.

§. 117.

Die Cubiczahl ist diejenige Zahl, welche entsteht, wenn man die Quadratzahl nochmals mit ihrer Wurzel multiplicirt. Die Zahl, daraus die Cubiczahl entsprungen, nennt man die **Cubicwurzel**.

§. 118.

Die Cubicwurzel aus einer gegebenen Cubiczahl ausziehen, heißt nichts anders, als diejenige Zahl finden, die durch ihre Quadratzahl multiplicirt, die gegebene Cubiczahl hervorbringt.

§. 119.

Die Cubiczahlen der natürlichen Zahlen läßt sich aus folgendem Wurzeltäfelein leicht einsehen: als

Wurzel	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Cubiczahl	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.

§. 120.

Eine Zahl, welche aus mehr nicht als dreyen Ziffern besteht, kann in ihrer Wurzel nicht mehr als eine Ziffer haben; denn die Zahl 10, welche die erste mit zweyen Ziffern ist, hat für ihre Cubiczahl 1000, welche schon aus vier Ziffern besteht. Eben so kann eine Zahl, die nicht mehr als sechs Ziffern hat, in ihrer Cubicwurzel nicht mehr als zwey Ziffern haben; denn 100, als die erste Zahl mit dreyen Ziffern hat in ihrer Cubiczahl schon sieben Ziffern, nemlich 1000000 u. s. w.

§. 121.

Die Cubicwurzel einer Zahl, die nicht mehr als drey Ziffern hat, findet man in der angesetzten Tabelle §. 119. Steht die gegebene Zahl in der untern Reihe der Cubiczahlen, so ist die darüber stehende Zahl ihre Cubiczahl. Ist aber die gegebene Zahl nicht in der Reihe der Cubiczahlen anzutreffen, so ist dieselbe keine vollkommene Cubiczahl, und hat keine genaue Cubicwurzel.

§. 122.

Aus Zahlen, die mehr als drey Ziffern haben, die Cubicwurzel ausziehen, ist schon beschwer-

schwerlicher, doch wird die Berechnung erleichtert, wenn man sich folgenden Grundsatz genau bekannt macht.

Wenn man was immer für eine Zahl, z. E. 7 in zween Theile zergliedert, z. E. in 4 und 3, so wird der Cubus derselben Zahl in sich begreifen erstens den Cubus des ersten Theils; zweytens den Cubus des zweyten Theils; drittens das Product aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils durch den zweyten multiplicirt; viertens endlich das Product aus dem dreyfachen Quadrate des zweyten Theils durch den ersten Theil multiplicirt. Also begreift 343 der Cubus von 7 in sich erstens 64 den Cubus des ersten Theils 4: zweytens 27 den Cubus des zweyten Theils 3: drittens 144 das Product aus 48 dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils 4 durch den zweyten Theil 3 multiplicirt. Viertens endlich 108 das Product aus 27 dem dreyfachen Quadrate des zweyten Theils 3 durch den ersten Theil 4 multiplicirt. Denn 64 + 27 + 144 + 108 = 343.

§. 123.

Aus einer gegebenen Cubiczahl die Cubicwurzel ausziehen.

Erstens: Theile man die gegebene Zahl in Klassen ab, von der Rechten gegen die Linke, und gebe jeder Klasse drey Ziffern, die

erste ausgenommen, welche zuweilen nur aus einer bestehen kann. Soviel man Klassen bekommt, soviel Ziffern muß die Wurzel haben (§. 119).

Zweytens: Suche man in der Tabelle der Cubiczahlen (§. 119.) den größten Cubus, welcher in der ersten Klasse enthalten ist. Ziehe diesen von der ersten Klasse ab. Die Wurzel dieses Cubus schreibe man hinter einen gezogenen Verticalstrich. Solchergestalt hat man den ersten Theil der verlangten Wurzel.

Drittens: Zu dem Reste, welcher nach der Abziehung geblieben ist, setze man die nächste Klaße herab. Multipkicire den ersten schon gefundenen Theil der Wurzel durch sich selbst, und das hieraus entstandene Quadrat durch 3: das Product schreibe man als einen Divisor unter den besagten Rest sammt der angehängten zweyten Klaße, doch also, daß die zwey letzten Ziffern der neu herabgesetzten Klasse leer bleiben, und nicht mit zur Division gebraucht werden. Alsdenn dividire man gewöhnlichermaßen: der Quotient ist der zweyte Theil der Wurzel.

Viertens: Multiplicire man den Divisor durch den Quotienten: das Product schreibe man also unter, daß die letzte Ziffer desselben unter die erste Ziffer der neu herabgesetzten Klaße zu stehen komme. Multiplicire man wieder

den neu gefundenen Quotienten durch sich selbst, hernach durch 3, endlich durch den schon vorher gefundenen Theil der Wurzel: das Product schreibe man also unter, daß die letzte Ziffer desselben unter der zweyten Ziffer der neu herabgesetzten zweyten Klaße zu stehen komme. Multiplicire man endlich den neu gefundenen Quotienten zweymal durch sich selbst: das Product schreibe man also unter, daß die letzte Ziffer desselben unter die letzte Ziffer der zweyten Klasse zu stehen komme.

Fünftens: Addire man diese drey Producte zusammen: die Summe ziehe man von dem gebliebenen Reste sammt der angehängten zweyten Klasse ab. Wenn man nun, von dem dritten Punkte der Regel angefangen, bey dennoch übrigen Klassen alles wiederholet, so erhält man die verlangte Cubicwurzel.

Zum Exempel.

Welche ist die Cubicwurzel der Zahl 47. 437. 928? Man theile die gegebene Zahl in ihre Klassen ab, wie man unten sieht. Suche man in der Tabelle der Cubiczahlen den größten Cubus, welcher von der ersten Klaße 47 kann abgezogen werden. Man findet 27: schreibe man diese 27 unter 47: die Wurzel 3 aber, so in besagter Tabelle unter 27 steht, schreibe man zur Rechten der gegebenen Zahl hinter einem Striche. Ziehe man 27 von 47 ab: zu dem Reste 20 setze man die nächste

nächste Klasse herab. Man bekommt 20437. Nun multiplicire man den ersten schon gefundenen Theil der Wurzel, nemlich 3, durch sich selbst: das Product 9 multiplicire man mit 3: das Product 27 schreibe man unter den Rest sammt der angehängten zweyten Klasse also, daß die letzte zwey Ziffern 37 leer bleiben: dividire man nun 204 durch 27: den Quotient 6 schreibe man als den zweyten Theil der gesuchten Wurzel hinter dem Striche neben den zuvor gefundenen ersten Theil. Multiplicire man den Divisor 27 durch diesen neu gefundenen zweyten Theil 6: das Product 162 schreibe man also unter den Rest sammt der angehängten zweyten Klasse, daß die letzte Ziffer 2 unter 4 zu stehen komme. Multiplicire man diesen zweyten Theil 6 durch sich selbst: das Product 36 multiplicire man durch 3: das Product 108 multiplicire man durch den ersten Theil 3: das Product 324 schreibe man also unter, daß die letzte Ziffer 4 unter 3 zu stehen komme: multiplicire man endlich den zweyten Theil durch sich selbst: das Product 36 wieder durch 6: den Cubus 216 schreibe man also unter die zweyte Klasse, daß die letzte Ziffer unter dem letzten derselben zu stehen komme: addire man alle drey also erhaltene Producte zusammen: die Summe ist 19656: diese ziehe man von der zweyten Klaße ab: so bekommt man einen neuen Rest 781. Neben diesen schreibe man die dritte Klasse: und man bekommt 781928.

Mul-

Multiplicire man den bisher gefundenen Theil der Wurzel nemlich 36 durch sich selbst, das Product 1296 durch 3: durch das Product 3888 dividire man den gebliebenen Rest sammt der angehängten dritten Klaße, doch so, daß die zwo letzten Ziffern 28 nicht mit zur Division genommen werden, mit einem Worte: dividire man 7819 durch 3888. Der Quotient ist 2: diesen schreibe man als den dritten Theil der Wurzel neben die zween vorigen Theile: mit eben diesem 2 multiplicire man den Divisor 3888: das Product 7776 schreibe man unter die dritte Klaße, doch also, daß die letzten zwey Ziffern derselben frey bleiben. Multiplicire man den eben gefundenen Theil der Wurzel, nemlich 2 durch sich selbst, das Product 4 multiplicire man mit 3: das Product 12 multiplicire man mit dem schon zuvor gefundenen Theile der Wurzel, nemlich mit 36: das Product 432 schreibe man also unter, daß die letzte Ziffer der dritten Klaße frey bleibe. Endlich multiplicire man den letzt gefundenen zweyten Theil der Wurzel, nemlich 2 durch sich selbst, das Product 4 abermal durch 2, das Product 8 schreibe man unter, also, daß die letzte Ziffer desselben (wenn es aus mehrern besteht) unter der letzten Ziffer der dritten Klaße zu stehen komme: addire man alle drey also erhaltene Producte zusammen: die Summe ist 781928, diese, wenn man abzieht, so bleibt kein Rest. 362 ist also die verlangte Wurzel.

47.

```
47. 437. 928 (362
27
-----------
20437
27
-----------
162
 324
  216
-----------
19656
-----------
 781928
 3888
-----------
 7776
   432
     8
-----------
 781928
-----------
      0
```

Erste Anmerkung. Man hat in eben angezogenem Exempel bey der zweyten Klaße, da man 204 durch 27 dividirt hat, 6 als den Quotienten angenommen. Nun ist 27 in 204 nicht nur 6mal enthalten. Allein, wenn man 7 als den Quotienten angenommen, und alsdenn nach der vorgeschriebenen Regel die drey gehörigen Producte gestaltet, und zusammen addirt hätte, so würde man eine Summe erhalten haben, welche von der zweyten Klaße nicht hätte können abgezogen werden. Aus welchem man dann würde geschlossen haben, der Quotient 7 sey zu groß. Und diese Regel muß man allezeit merken; wenn aus den

dreyen Producten eine Summe entsteht, welche größer ist, als die Klaße, von der sie soll abgezogen werden: so ist der Quotient zu groß genommen worden.

Zweyte Anmerkung. Wenn eine neuerdings herabgesetzte Klaße durch das dreyfache Quadrat des zuvor gefundenen Theils der Wurzel nicht kann dividirt werden, ohne die vorletzte Ziffer dieser neuen Klasse mit zum Dividendus zu rechnen, so muß man alsobald eine Nulle in der Wurzel schreiben, und alsdenn die nächstfolgende Klaße auch herabsetzen.

Zum Exempel.

```
8. 365. 427 (203
8
-------
0365427
 1200
-------
 3600
  540
   27
-------
 365427
-------
     0
```

Die Ursache dieser vorgeschriebenen Regel gründet sich auf jenen Grundsatz, den man §. 122. vorangeschickt hat. In der ersten Klaße einer gegebenen Zahl ist der Cubus des ersten Theils der Wurzel enthalten, und insgemein

gemein noch etwas darüber. Man muß also die Wurzel aus dem darinn verborgenen Cubus ausziehen, den Cubus selbst aber von der ersten Klaße subtrahiren. In dem Reste sammt der ersten Ziffer der zweyten Klaße ist enthalten das Product aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Theils durch den zweyten multiplicirt: man muß also diesen Rest sammt der ersten Ziffer der neuen Klaße durch das dreyfache Quadrat des ersten Theils der Wurzel dividiren, damit man den zweyten Theil bekommt. Die zwey letzten Ziffern darf man nicht mit zur Division gebrauchen, weil diese für die zwey andere Producte gehören, die noch in dieser zweyten Klaße stecken müssen. Man muß endlich die drey in der Regel angezeigten Producte machen, selbe addiren, und alsdenn von der zweyten Klaße abziehen, weil alle diese Producte gemäß dem Grundsatze §. 122. in dieser zweyten Klaße enthalten seyn müssen.

Erste Anmerkung. Wenn man die Cubicwurzel aus einem Bruche ausziehen soll, so ziehe man die Wurzel besonders aus dem Zähler, und alsdenn aus dem Nenner.

Zweyte Anmerkung. Wenn man in Ausziehung der Cubicwurzel am Ende, da keine Klaße mehr herabzusetzen übrig ist, einen Rest bekommt, so ist die gegebene Zahl kein genauer Cubus, und kann also keine genaue

Cubic-

Cubicwurzel gefunden werden. Doch kann man derselben so nahe kommen, als immer beliebig ist; indem man immer 3 Nullen zum Reste hinzusetzt, und neue Ziffern für die Wurzeln nach der Vorschrift der Regel sucht, welche alsdenn Decimalziffern sind, und von den Ganzen durch ein Strichlein müssen abgesöndert werden.

Dritte Anmerkung. Da diese Art, die Cubicwurzel auszuziehen, vielen ziemlich beschwerlich scheinen wird, so soll also noch eine in etwas veränderte folgen.

Die drey ersten Puncte beobachte man, wie in der Regel ist vorgeschrieben worden. Nachdem man also den zweyten Theil der Wurzel gefunden hat, multiplicire man die ganze bis dahin gefundene, und also aus zweyen Ziffern bestehende Wurzel durch sich selbst: das Product multiplicire man noch einmal durch die ganze bis dahin gefundene Wurzel. Das Product ziehe man von den zwoen ersten Klaßen der gegebenen Zahl ab. Zum Reste setze man die dritte Klaße herab, und wiederhole man abermal die ganze Arbeit, vom dritten Puncte angefangen, bis zum Ende.

Es sey das oben gesetzte erste Exempel wieder vorzunehmen. Die Wurzel der ersten Klaße ist 3. Nach abgezogenem Cubus 27 bleibt der Rest 20: und wenn die nächste Klaße dazu gesetzt wird, entsteht 20437. Den

 zweyten

zweyten Theil der Wurzel zu finden, muß man gemäß der Anfangs gegebenen Regel 204 durch 27 dividiren. Der Quotient ist 6. Nun multiplicire man 36 durch 36: das Product 1296 abermal durch 36: das Product 46656 ziehe man von den ersten zwoen Klaßen der gegebenen Zahl ab, nemlich von 47437: zum Reste 781 setze man die dritte Klaße, und man bekommt 781928. Um den dritten Theil zu finden, verfahre man, wie in der ersten Regel vorgeschrieben worden: hat man diesen, nemlich 2 gefunden, so multiplicire man 362 durch 362: das Product 131044 abermal durch 362: das Product 47437928 ziehe man von der gegebenen Zahl ab; so bleibt kein Rest. Also ist 362 die verlangte Wurzel. Man sehe hier die ganze Bearbeitung.

```
47. 437. 928 (362
 27
 -----
 20437
 27
 46656
 ----------
   781928
   3888
 ----------
 47437928
 ----------
      0
```

§. 124.

Mehrere Kugeln verhalten sich ihrem körperlichen Inhalte, und, wenn sie von der

nem-

nemlichen Materie sind, auch ihrer Schwere nach, wie die Cubus ihrer Durchmesser. Nun wiegt eine eiserne Kugel von einem Schuhe oder 12 Zollen im Durchmesser beynahe 288 Pfunde. Wie viel wird also eine andere gleichfalls eiserne Kugel wägen, welche im Durchmesser 7 Zolle hat?

Man sage: wie sich der Cubus von 12, nemlich 1728 zum Cubus von 7 verhält, so verhalten sich 288 Pfunde zur gesuchten Schwere der Kugel von 7 Zollen im Durchmesser.

1720 : 343 : : 288 : 57 Pfunde beynahe.

Auf solche Art kann man gar leicht die Schwere was immer für einer Kugel, von was immer für einem Metalle, Steine oder Holze durch die Rechnung bestimmen, wenn man nur die Schwere einer Kugel von einer gewissen Größe, etwa von einem Schuhe im Durchmesser von eben selbem Metalle, Steine oder Holze kennt.

§. 125.

Ein würfelförmiges Geschirr, das ist, ein solches, welches von gleicher Länge, Höhe und Breite ist, damit es eben 3 Cubicschuhe Wasser fasse, wie lang, wie breit, wie hoch muß es seyn?

Man ziehe die Cubicwurzel aus 3, also daß man sie wenigst bis auf 2 Decimalzahlen genau findet.

```
3,000. 000 (1,44
1
―――――――
2000
3
―――――――
12
 48
  64
―――――――
1744
 256000
 588
―――――――
2352
  672
   64
―――――――
241984
―――――――
 14016 u. s. f.
```

Vierzehnter Abschnitt.

Von der Decimal-Rechnung.

Von dem wahren Begriff eines Decimalbruches, und wie dieselben ausgesprochen werden müssen.

§. 126.

Die Decimalbrüche sind solche, welche die Einheit mit einer oder mehreren Nullen zu ihrem Nenner haben. Also sind $\frac{5}{10}$, $\frac{3}{100}$ $\frac{7}{1000}$, $\frac{13}{10000}$, $\frac{754}{100000}$ u. s. f. Decimalbrüche. Aber diese Nenner werden gar selten ausgedrückt: man begnügt sich, die Zähler zu schreiben, und selbe von den Ganzen durch ein kleines Strichlein, oder durch einen Punct abzusöndern; da dann allezeit die Einheit mit so vielen Nullen, soviel der Zähler Ziffern hat, als der Nenner verstanden wird. Also bedeutet 5,4 soviel als $5\frac{4}{10}$: und 4,65 soviel als $4\frac{65}{100}$: und 3,037 soviel als $4\frac{37}{1000}$. Wenn keine Ganze zugegen sind, so wird vor dem Strichlein eine 0 geschrieben, diesen Abgang der Ganzen anzuzeigen. Also heißt 0,5 soviel als $\frac{5}{10}$, und 0,35 soviel als $\frac{35}{100}$.

§. 127.

Hieraus lernet man jeden Decimalbruch auszusprechen. Man muß nemlich den Zähler

nach der gemeinen Art der ganzen Zahlen lesen, alsdenn die Einheit sammt so vielen Nullen, so viele Ziffern im Zähler sind, als den Nenner dazu setzen. Man wird diesen Bruch 0,57 also lesen: sieben und fünfzig hunderteste Theile: den Bruch 0,037 also: sieben und dreyßig tausendeste Theile, und so von andern.

Doch giebt es noch eine andere Art dergleichen Brüche auszusprechen. Denn, weil $\frac{5}{10}$ und $\frac{7}{100}$, wenn sie unter einem Nenner gebracht, und alsdenn addiret werden, $\frac{57}{100}$ Theile ausmachen; so folgt, daß man bey Decimalbrüchen entweder den ganzen Zähler auf einmal, und alsdenn den allgemeinen Nenner, oder aber jede Ziffer des Zählers besonders sammt seinem besondern Nenner aussprechen kann. Also kann man diesen Bruch 0,357 entweder aussprechen durch dreyhundert sieben und fünfzig tausendeste Theile, oder auch durch drey zehnte, fünf hunderteste und sieben tausendeste Theile. Eben also, wenn geschrieben steht 0,0037, kann man lesen: sieben und dreyßig zehntausendeste Theile, oder aber: kein zehnter, kein hundertester Theil, dreytausendeste, sieben zehntausendeste Theile.

§. 128.

Damit man sich einen rechten Begriff von diesen Brüchen macht, betrachte man folgende Ta-

Tabelle; man wird daraus den wahren Grund erkennen, auf welchem die ganze Berechnung der Decimalbrüche beruhet.

Ganze							Decimalen.					
6	5	4	3	2	1	8	1	2	3	4	5	6
Der Millionen	Der Hunderttausende "	Der Zehntausende " "	Der Tausende " " "	Der Hunderte " " "	Der Zehner " " " "	Die Stelle der Einheiten	Der Zehnten Theile " "	Der Hundertesten " "	Der Tausendesten " "	Der Zehntausendesten "	Der Hunderttausendesten	u. s. f.

Diese Tabelle zeigt, daß der Werth der Decimalzahlen von der Rechten zur Linken immer um zehnmal größer werde, eben wie bey den ganzen Zahlen, und daß also diese Decimalzahlen einerley Natur mit den Ganzen haben.

§. 129.

Aus diesem folgt erstens: Jede Decimalzahl bekommt ihre Benennung und ihren Werth von dem Orte, an dem sie steht.

Also ist $\begin{cases} 0{,}5 = \frac{5}{10} \\ 0{,}05 = \frac{5}{100} \\ 0{,}005 = \frac{5}{1000} \\ 0{,}0005 = \frac{5}{10000} \end{cases}$

Zweytens: Die Nullen, welche den Decimalzahlen zur Rechten angehängt sind, verändern derselben Werth nicht. Also gilt 0,5 und 0,50 und 0,500 gleich viel, nemlich $\frac{5}{10}$.

Drittens: Aber die Nullen, welche zur Linken der Decimalziffern stehen, vermindern ihren Werth, indem sie selbe von dem Strichlein weiter entfernen. Also $5{,}0 = \frac{5}{10}$, $0{,}05 = \frac{5}{100}$, und $0{,}0005 = \frac{5}{10000}$. Wenn man dieses alles wohl begriffen hat, so wird man in dem, was folgt, keine Schwierigkeit mehr finden.

Von der Addition und Subtraction der Decimalzahlen.

§. 130.

Im Anschreiben der Zahlen, welche man addiren oder subtrahiren will, habe man Acht, daß man die vom gleichen Werthe untereinander schreibe. Daher muß man das Strichlein, welches die Ganzen von den Decimalen scheidet, wohl vor Augen haben. Diese Strichlein müssen im Anschreiben alle genau unter einander stehen; wodurch dann ge-

geschehen wird, daß die zehnte Theile unter die Zehnte, die Hunderteste unter die Hunderteste u. s. f. zu stehen kommen: und zur Linken des Strichlein die Einheiten unter die Einheiten, die Zehner unter die Zehner u. s. f. Alsdenn verrichte man die Addition oder Subtraction eben so, als wenn die gegebenen Zahlen lauter ganze vorstellten. In der Summe, oder in der Differenz setze man das Strichlein gerad unter das Strichlein der oben stehenden Zahlen.

Exempel der Addition.

Welches ist die Summe dieser Zahlen 34,5+65,3+12,8+95+87,81+7,9.

Man schreibe sie also unter einander:

	34,5
	65,3
	12,8
	95
	87,81
	7,9
Summe	303,31

II	III	IV
45,07	574,678953	0,975642
50,758	95,79643	0,745257
123,0057	78,0546	0,000598
74,702	54,789	2,8007
24,8	8,9	0,64053
318,3357	812,218983	5,162727

Exempel der Subtraction.

	I	II	III
von : :	74,284	437,5	75,0034
subtrahire man :	45,375	89,657	57,875
Der Rest ist : :	28,909	347,843	17,1284

Anmerkung.

In dem zweyten Exempel muß man sich die zween letzten Plätze rechter Hand mit Nullen besetzt, vorstellen, Ja, wenn man will, kann man die Nullen wirklich hinschreiben, weil dadurch der Werth nicht geändert wird, wie schon oben ist gesagt worden.

	IV	V	VI
von : :	562,	245,7578	0,547893
subtrahire man	93,5784	157,	0,49758
Der Rest ist :	468,4216	088,7578	0,050313

	VII	VIII
von : :	0,237	1
subtrahire man :	0,228	0,997543
Der Rest ist : :	0,009	0,002457

Die Probe der Addition und Subtraction wird gemacht, wie bey den Ganzen.

Zu Amsterdam ist ehemals ein Brunnen gegraben worden, wo man die Schichten, wie folgt, über einander gefunden hat.

Schwarze Gartenerde	0,7 einer Ruthe
Torf	0,9
Weicher Thon	0,9
Sand	0,8
Gartenerde	0,4
Thon	1
Erde	0,4
Sand	1
Thon	0,2
Weißer Sand	0,4
Trockene Erde	0,5
Morast	0,1
Sand	1,4
Sandichte Lette	0,3
Sand mit Thon vermenget	0,5
Sand mit Seemuscheln vermengt	0,4
Thon	10,2
Kießlichter Sand	3,1
Summe	23,2

Wenn man eine Portion von reinem Wasser nimmt, welche 1 Pfund wiegt, so wiegt ein Stück

Erz von gleich großem körperlichen Inhalt	9
Silber	11,091
Gold	19,640
Stahl	7,803
Eisen	7,645
Queckfilber	14,
Bley	11,310
Zinn	7,32
Englisch Zinn	7,295
Marmor	2,718
Grünlichtes Glas	3,620
Eichen Holz	0,550
Roth Brasilianisch Holz	1,031
Buchsbäumenes Holz	1,031
Ebenholz	1,177
Buchenholz	0,738
Pantoffelholz	0,240
Gelbes Wachs	0,955
Weihrauch	1,071

Nun fragt man, wieviel wägen alle diese Stücke zusammen, das Wasser nicht mitgerechnet? Man findet: 108,235 Pfunde.

Ein Cubicschuh Wasser wiegt 72 Pfunde; ein Cubicschuh Eisen 550,440 Pfunde. Nun verliert jeder Körper, wenn er ins Wasser versenkt wird, soviel von seiner Schwere, als das Wasser, so einen gleichen Raum mit ihm einnimmt, wiegt. Wenn also ein Cubicschuh Eisen ins Wasser versenket wird, wieviel wird er noch wägen?

	550.440
	72
Antwort:	478.440

Ein Cubicschuh von Eichenholz wiegt 39,6 Pfunde. Ein Cubicschuh Buchenholz aber 53,136. Um wieviel wiegt also dieser mehr, als jener?

	53,136
	39,6
Antwort:	13,536 Pfunde.

Von der Multiplication der Decimalzahlen.

§. 131.

Multiplicire man beyde Factoren durch einander eben so, als wenn es ganze Zahlen wären. In dem Producte sondere man so viele zur Rechten stehende Ziffern durch das Strichlein von den Ganzen ab, als viele Decimalziffern in beyden Factoren zugleich sind.

Exem-

Exempel.

	I	II
Der Multiplicandus	3,024	32,12
Der Multiplicator	22,3	24,3
Das Product	67,4352	780,516

	III	IV
Der Multiplicandus	87,546	5745
Der Multiplicator	4,36	0,0645
Das Product	342,46056	387,7875

Erste Anmerkung. Es ereignet sich nicht selten, daß man im Producte nicht so viele Ziffern hat, als man gemäß der Regel durch das Strichlein abschneiden sollte. In diesem Falle muß man so viele Nullen zur Linken hinzusetzen, als nöthig sind, damit man die gehörige Anzahl der Decimalziffern abschneiden könne.

Exempel.

	V	VI
Multiplicandus	0,5365	0,0347
Multiplicator	0,02435	0,0236
Das Product	0,013063775	0,00081892

Zweyte Anmerkung. Wenn man Decimalzahlen mit 10, 100, 1000 u. s. f. multipliciren soll, so rücke man nur das Strichlein um so viele Stellen gegen die rechte Hand, als der Multiplicator Nullen hat. Also ist

0,587

$0,587 \times 10 = 5,87$; und $0,587 \times 100 = 58,7$; und $0,587 \times 1000 = 587$; und endlich $0,587 \times 10000 = 5870$.

Hier sind noch einige Exempel zur Uebung.

$57,056 \times 0,578 = 32,978368$
$76,543 \times 5,4246 = 415,2151578$
$0,56879 \times 0,5674 = 0,322731446$
$0,03246 \times 0,02364 = 0,0007673544$
$87649 \times 0,03687 = 3231,61863$
$94,35786 \times 6,57869 = 620,751110034$
$3,141592 \times 52,7438 = 165,6995001296$

Noch andere Exempel zur Uebung.

Ein Pfund Eisen verliert in dem Wasser 0.1308 eines Pfundes: ein Pfund Erz 0.1138 eines Pfundes: ein Pfund italiänischen Marmors 0,3679. Nun dieses vorausgesetzt, lassen sich folgende drey Aufgaben leicht auflösen.

Erste Aufgabe. Ein 352 Pfund schwerer eisener Körper ist in dem Wasser versunken. Wieviel wird er im Wasser noch wägen? Wie große Kräfte werden erfordert, selben empor zu ziehen?

$0,1308 \times 352 = 46,0416$ soviel verliert er im Wasser.

Dieses abgezogen von 352

giebt zum Reste : : 305,9584 soviel wird er also im Wasser wägen.

Zweyte

Zweyte Aufgabe. Wieviel braucht man Kräfte, eine marmorsteinerne Statue von 573 Pfunden aus dem Wasser empor zu ziehen?

0,3679 × 573 = 210,8067 soviel verliert sie im Wasser.

Dieses abgezogen von 573

giebt zum Reste : : 362,1933 soviel wiegt sie noch im Wasser.

Dritte Aufgabe. Ein erzerner Lauf eines Stücks von 1365 Pfunden ist in das Wasser versenkt worden. Wie viele Kräfte sind nothwendig, selbes daraus zu erheben?

0,1138 × 1375 = 156,4750

Dieses abgezogen von 1375

giebt zum Reste : : 1218,5250

Man hat also gefunden, wieviel diese versunkenen Körper noch im Wasser wägen. Wenn sie also mit um etwas größern Kräften angezogen werden, so werden sie in die Höhe getrieben werden.

Vierte Aufgabe. Wenn die Schwere eines Cubicschuhes Wasser bekannt ist, kann man durch die Multiplication auch die Schwere eben eines solchen Cubicschuhes von allen jenen Körpern finden, welche in der zweyten Aufgabe des vorhergehenden Abschnittes angesetzt sind. Wir wollen setzen, ein

Pariser

Pariser Cubicschuh Wasser wäge 72 Pfunde: so darf man nur diese Zahl 72 multipliciren durch jene Zahl, welche in besagter Aufgabe neben jeder Gattung der Körper steht. Also findet man, es wäge

ein Cubicschuh Erz 72×9=648
Silber 72×11,091=798,552
Gold 72×19,640=1414,080

und so von den übigen.

Fünfte Aufgabe. Es ist eine steinerne Statue in mehrere Trümmer zerschlagen. Ein Künstler soll eine vollkommen gleiche von Erze verfertigen. Nun verlangt man zu wissen, wie viele Pfunde Erz er hiezu nöthig habe. Dieses zu berechnen, kann man also verfahren: Man lasse eine viereckichte reguläre Kiste verfertigen, welche das Wasser halte. Messe die Länge und die Breite dieser Kiste sehr genau. Gesetzt, die Länge sey 4 Schuh, 3 Zolle, und 7,6 Linien, oder nachdem man alles in Linien verändert, 619,6 Linien; die Breite 2 Schuhe, 3 Zolle, und 5,4 Linien, oder nach der Reduction 329,4 Linien. Multiplicire man beyde durch einander.

619,6
329,4
———
204096,24 Product.

Dieses Product ist die Grundfläche der Kiste in Quadratlinien ausgedrückt. Nun

M gieße

gieße man soviel Wasser in die Kiste, soviel man nöthig erachtet, daß alle Trümmer der zerbrochenen steinernen Statue darinn können versenket werden. Zeichne man an den Seiten der Kiste auf das genaueste, wie hoch das Wasser steht. Alsdenn werfe man die Trümmer der Statue alle in das Wasser. Untersuche man, so genau es möglich ist, um wie viel nun das Wasser gestiegen ist. Wir wollen setzen, man finde, daß es um 11 Zolle und 7,3 Linien höher stehe, das ist, nach der Reduction, um 139,3 Linien. Multiplicire man die zuvor gefundene Grundfläche der Kiste mit diesen 139,3 Linien.

$$\begin{array}{r} 204096,24 \\ 139,3 \\ \hline 28430606,232 \end{array}$$

Dieses Product ist der körperliche Inhalt der ganzen Statue in Cubiclinien ausgedrückt.

Untersuche man mit aller möglichen Genauigkeit, wieviel ein Cubicschuh eines reinen Wassers wiege (man muß aber einen solchen Schuh nehmen, in welchen man die Kiste abgemessen hat); wir wollen setzen, man finde 72 Pfunde. Multiplicire man diese mit 9; weil das Erz neunmal schwerer ist, als das Wasser: das Product 648 Pfunde ist die Schwere eines Cubicschuh Erzes. Aus diesem folgt, eine Cubiclinie von Erz wäge 0,000217017

von

von einem Pfunde (wie man durch die Division erfahren könnte, welche wir in dem nächsten §. erklären wollen). Multiplicire man dieses mit dem oben gefundenen körperlichen Inhalte der Statue.

$$\begin{array}{r} 28430606,232 \\ 0,000217017 \\ \hline 6169,924872649944 \end{array}$$ Product.

Dieses Product ist die Schwere der zu verfertigenden Statue. Wenn man also die Decimalzahlen wegläßt, so erkennt man, daß man 6170 Pfunde Erz brauche.

Von der Division der Decimalzahlen.

§. 132.

Man erinnere sich jenes Grundsatzes: Das Product, welches aus der Multiplication des Quotienten durch den Divisor entsteht, ist jederzeit dem Dividendus gleich. Aus diesem Grundsatze, wenn man, was von der Multiplication der Decimalzahlen ist gesagt worden, dazu nimmt, fließt diese allgemeine Regel der Division. In dem Divisor und Quotienten zugleich müssen so viele Decimalziffern seyn, als viele derselben der Dividendus hat. Uebrigens verrichte man die Division mit Decimalzahlen eben so, als wenn sie alle lauter Ganze vorstellten.

Aus dieser allgemeinen Regel fließen vier sonderheitliche, die in vier verschiedenen Fällen, welche in der Division der Dicimalzahlen vorkommen können, dienen müssen.

§. 133.

Erster Fall. Wenn der Divisor eben so viele Decimalziffern hat als der Dividendus, so zeigen alle Ziffern des Quotienten Ganze an: wie in diesen Exempeln.

8,45) 295,75 (35	0,0078) 0,4368 (56
2535	390
4225	468
4225	468
0	0

§. 134.

Zweyter Fall. Wenn der Dividendus mehr Decimalziffern hat als der Divisor, so schneide man in dem Quotienten so viele zur Rechten stehende Ziffern durch das Strichlein ab, um so viel der Dividendus mehr Decimalziffern hat als der Divisor. Also, wenn der Dividendus vier, der Divisor aber 3 Decimalziffern hat, so muß man im Quotienten eine abschneiden: hat der Divisor drey, der Dividendus aber sieben, so muß der Quotient vier bekommen.

Zum Exempel.

```
24,3)780,516(32,12    436)34246,056(78,546
     729                  3052
     ---                  ----
     515                  3726
     486                  3488
     ---                  ----
     291                  2380
     243                  2180
     ---                  ----
      486                 2005
      486                 1744
      ---                 ----
        0                  2616
                           2616
                           ----
                              0
```

```
0,534) 0,30438 (0,57
        2670
        ----
        3738
        3738
        ----
           0
```

Anmerkung.

Wenn nach vollbrachter Division ein Rest bleibt, so kann man diesen Rest außer Acht lassen, wenn man sieht, daß der Quotient schon etliche Decimalzahlen hat, und also schon genau genug gefunden ist: oder wenn der Quotient noch keine oder sehr wenige Decimalen hat, und hiemit noch nicht gar genau gefunden ist; so kann man zu diesem Reste

eine 0 setzen, und die Division weiter fortsetzen: bleibt nach dieser Division noch ein Rest, so kann man wieder eine 0 hinzusetzen, und in der Division fortfahren, u. s. f. so lang es beliebt, und bis man erkennet, daß nunmehr der Quotient genug Decimalen hat, und hiemit der Fehler, der aus Verachtung des letzten Restes entsteht, nicht mehr beträchtlich ist. Jedoch muß man hiebey dieses merken, daß man alle hinzugesetzte 0 als Decimalziffern des Dividendus betrachte, und im Quotienten so viele letzte Ziffern durch das Strichlein absondere, als viele alle Decimalziffern des Dividendus erfordern.

Zum Exempel.

```
2,35) 1356 (5,7702
      1175
      ----
       1810
       1645
       ----
        1650
        1645
        ----
          500
          470
          ---
           30
```

In diesem Exempel waren Anfangs im Dividendus zwo Decimalzahlen; man hat aber in der Fortsetzung der Division vier 0 hinzugethan; wenn man also diese als Decimalzahlen

malzahlen betrachtet, so sind nunmehr sechs Decimalziffern im Dividendus. Im Divisor sind zwey Decimalziffern: es müssen also im Quotienten vier seyn: und folglich muß das Strichlein nach 5 gesetzt werden. Der letzte Rest 30 wird vernachläßiget, weil man im Quotienten schon vier Decimalziffern hat; und also nicht mehr um einen zehntausendesten Theil eines Ganzen fehlen kann: welcher Fehler nicht mehr zu achten ist. Dieses wird noch besser weiter unten erklärt werden.

§. 135.

Dritter Fall. Wenn der Dividendus weniger Decimalziffern hat, so setze man am Ende des Dividendus alsobald, bevor man die Division anfängt, so viele 0 hinzu, als erklecklich sind, daß die Anzahl der Decimalziffern des Dividendus jener des Divisors gleich werde. Wenn alsdenn die Division zum Ende gebracht ist, so zeigen die Ziffern des Quotienten lauter Ganze an.

Zum Exempel.

2,521) 19743655,4

Setze man, bevor man die Division anfängt, zwo Nullen zum Dividendus; weil im Divisor drey Decimalziffern sind, der Dividendus aber nur eines hat. Das Exempel wird alsdenn also stehen, und die Division also fortlaufen, wie man hier sieht.

2,521) 1974364555,400 (783167 6$\frac{204}{2521}$

17647

20966
20168

7985
7563

4225
2521

17044
15126

19180
17647

15330
15126

204

Zweytes Exempel.

1,32) 3036

Setzt man, bevor man die Division anfängt, zwo Nullen zum Dividendus, weil im Divisor zwo Decimalzahlen sind, der Dividendus aber keine hat. Das Exempel wird alsdenn also stehen, und die Division also laufen, wie man hier sieht.

132) 3036,00 (2300 lauter Ganze.

264

396
396

0

Drit-

Drittes Exempel.

0,3021) 50142

Setze man, bevor man die Division vornimmt, vier Nullen zum Dividendus; denn wird der Dividendus soviel Decimalziffern bekommen, als der Divisor hat. Die Division selbst wird also lauten.

$$
\begin{array}{l}
0{,}3021)\ 50142{,}0000\ (165978\tfrac{462}{3021} \\
\quad 3021 \\
\hline
\quad 19932 \\
\quad 18126 \\
\hline
\quad\ \ 18060 \\
\quad\ \ 15105 \\
\hline
\quad\ \ \ 29550 \\
\quad\ \ \ 27189 \\
\hline
\quad\ \ \ \ 23610 \\
\quad\ \ \ \ 21147 \\
\hline
\quad\ \ \ \ \ 24630 \\
\quad\ \ \ \ \ 24168 \\
\hline
\quad\ \ \ \ \ \ \ 462
\end{array}
$$

Anmerkung.

In dem ersten und dritten Exempel kann man den zuletzt gebliebenen Rest in Gestalt eines Bruches anschreiben, nach und nach einige Nullen dazusetzen, und also in der Division fortfahren; da dann die neu entstandenen Ziffern so viele Decimalziffern des Quotienten seyn würden.

§. 136.

Vierter Fall. Wenn nach verrichteter Division nicht so viele Ziffern im Quotienten sind, als man gemäß der Regel abschneiden sollte, so setze man zur Linken so viele Nullen hinzu, als man nöthig hat.

Zum Exempel.

```
956) 7,24648 (0,00758
      6 692
     ---------
      ·5544
       4780
     ---------
       ·7648
        7648
     ---------
          0
```

Weil in diesem Exempel der Dividendus fünf Decimalziffern hat, der Divisor aber gar keine, so muß der Quotient gleichfalls fünf bekommen. Nun aber bekömmt in der wirklichen Division der Quotient nur drey Ziffern, nemlich 758; man setze also noch zwo Nullen vor dieselbe, und alsdenn das Strichlein, und vor dieses noch eine Nulle, zum Zeichen, daß die Ganzen abgehen.

Zweytes Exempel.

```
0,575) 0,0007475 (0,0013
        575
        ----
        1725
        1725
        ----
           0
```

Weil in diesem Exempel der Dividendus sieben, der Divisor drey Decimalziffern hat, so muß der Quotient vier bekommen. Wenn man nun die Zahl 7475 durch 575 dividirt, so entsteht der Quotient 13. Man setze also noch zwo Nullen davor, und alsdenn das Strichlein; so hat man den wahren Quotienten.

§. 137.

Anmerkung.

Wenn man Decimalzahlen durch 10, 100, 1000 u. s. f. dividiren soll, so rücke man das Strichlein um so viele Stellen zur Linken, als viele Nullen der Divisor hat. Also ist

```
   10) 5784 (578,4
  100) 5784 (57,84
 1000) 5784 (5,784
10000) 5784 (0,5784
```

Hier sind noch einige Exempel zur Uebung, in welchen alle vier Fälle vorkommen.

57,4)

57,4)	4930,66	(85,9
574)	493,066	(0,859
574)	49,3066	(0,0859
5,74)	4930,66	(859
5,74)	49,3066	(8,59
0,0574)	0,493066	(8,59
5,74)	493066	(85900
0,0574)	493,066	(8590

Man lasse nun die Anwendung in einigen praktischen Aufgaben, in denen die Multiplication sowohl als Division mit Decimalzahlen vorkömmt, machen.

Erste Aufgabe. Ein Cubicschuh Silber wiegt 798,552 Pfunde. Wieviel wiegt ein Cubiczoll? Wieviel eine Cubiclinie?

Weil ein Cubicschuh 1728 Cubiczolle in sich hat, so dividire man 798,552 durch 1728. Der Quotient ist 0,462125: und dieses ist die Schwere eines Cubiczolles. Weil nun ein Cubiczoll abermal 1728 Cubiclinien in sich begreift, so dividire man 0,462125 durch 1728. Der Quotient 9,000268 giebt die Schwere einer Cubiclinie.

Anmerkung.

Um aus dem gegebenen Durchmesser eines Cirkels die Peripherie desselben zu finden, muß man den Durchmesser mit 3,14159 multipliciren. Wenn die Peripherie gefunden ist, so

so bekommt man die Fläche desselben Cirkels, wenn man den vierten Theil des Durchmessers mit der Peripherie multiplicirt. Wenn die Cirkelfläche bekannt ist, welche entsteht, wenn eine Kugel mitten entzwey geschnitten wird, so findet man die ganze Oberfläche der Kugel, wenn die Fläche desselben Cirkels mit 4 multiplicirt wird: und wenn man die Oberfläche der Kugel mit dem sechsten Theile des Durchmessers multiplicirt, so erhält man den körperlichen Inhalt dieser Kugel. Alles dieses ist in der Geometrie erwiesen. Nun dieses vorausgesetzt; sey

Die zweyte Aufgabe. Es ist eine eiserne Kugel: sie hat 1 Schuh, 2 Zolle, 3,6 Linien im Durchmesser. Man verlangt zu wissen die Größe der Cirkelfläche, welche entstehen würde, wenn die Kugel mitten entzwey getheilet würde: zweytens die Oberfläche der ganzen Kugel: drittens ihren körperlichen Inhalt: viertens ihr Gewicht oder ihre Schwere.

Wenn man den Durchmesser in lauter Linien ausdrückt, so bekommt man 171,6 Linien.

Hieraus entsteht

$171,6 \times 3,14159 = 539,096844$ die Peripherie.
$171,6 : 4 = 42,9$ - - - der vierte Theil des Durchmessers.

$539,096844 \times 42,9 = 23127,2546076$ die Fläche des Cirkels in Quadratlinien.

23127,2546076 × 4 = 92509,0184304 die Oberfläche der ganzen Kugel in Quadratlinien.

171,6 : 6 = 28,6 : : der sechste Theil des Durchmessers.

92509,0184304 × 28,6 = 2645757,92710944 der körperliche Inhalt der ganzen Kugel in Cubiclinien.

Ein Cubicschuh hält in sich 12 × 12 × 12 oder 1728 Cubiczolle: ein Cubiczoll 1728 Cubiclinien. Also hält ein Cubicschuh in sich 1728 × 1728 oder 2985984 Cubiclinien. Dividirt man also den in Cubiclinien gefundenen körperlichen Inhalt durch diese Zahl: so bekommt man

2645757,92710944 : 2985984 = 0,88605897

Ein Cubicschuh von Eisen wiegt 550,440 Pfunde. Hieraus entsteht

0,88605897 × 550,440 = 487,72229944680 die Schwere der gegebenen Kugel.

§. 138.

Anmerkung.

Die magdeburgischen Halbkugeln, wenn die Luft rein ist ausgepumpet worden, werden von der darauf liegenden Luft so stark an einander gedrückt, soviel eine Säule von Quecksilber, die die Fläche der Halbkugel zu ihrer Grundfläche, und 26 Zolle oder 312 Linien

in

in der Höhe hätte, wägen würde. Nun aber findet man den körperlichen Inhalt einer solchen Säule, wenn man die Grundfläche durch die Höhe multiplicirt.

Dritte Aufgabe. Zwo magdeburgische Halbkugeln haben im Durchmesser 8 Zolle 4,6 Linien, oder 100,6 Linien. Wenn alle Luft aus ihnen herausgezogen würde, wie stark würden sie an einander halten?

100,6×3,14159=316,043954 die Peripherie.
100,6 : 4=25,15 : : der vierte Theil des Durchmessers.

316,043954×25,15=7948,5054431 die Cirkelfläche der Halbkugel.

7948,5054431 × 312 = 2479933,6982472 der körperliche Inhalt der merkurialischen Säule in Cubiclinien.

2479933,6982472 : 2985984 = 0,8305248 eben dieser körperliche Inhalt in Cubicschuhen.

72×14=1008 : : Schwere eines Cubicschuhes Queckſilbers.

0,8305248×1008=837,1689984 Schwere der merkurialischen Säule in Pfunden ausgedrückt, und zugleich die Kraft, mit der die Halbkugeln zusammen hangen.

Anmer-

Anmerkung.

Ein Körper, dessen Grundfläche ein Cirkel ist, und welcher über das von unten hinaufwärts immer, bis er endlich in eine Spitze zusammen läuft, also abnimmt, daß, wo man denselben immer parallel mit der Grundfläche durchschnitte, der Durchschnitt eine Cirkelfläche wäre, wird ein Kegel genannt. Nun ist ein solcher Kegel der dritte Theil eines Cylinders, welcher eben dieselbe Grundfläche und Höhe hat.

Vierte Aufgabe Die Grundfläche eines gewissen Kegels hat im Durchmesser 9 Zolle, und 4,4 Linien, oder 112,4 Linien. Die Höhe ist 11 Zolle und 3,7 Linien, oder 135,7 Linien. Wie groß ist sein körperlicher Inhalt?

112,4×3,14159=353,114716 die Peripherie.

112,4 : 4 = 28,1 „ „ der vierte Theil des Durchmessers.

353,114716 × 28,1 = 9922,5235196 die Grundfläche in Quadratlinien.

9922,5235196×135,7=1346486,44160972 der körperliche Inhalt des Cylinders in Cubiclinien.

1346,486,44160972 : 3=448828,813869906 der körperliche Inhalt des Kegels in Cubiclinien.

448828,813869906 : 172 =259,738896915 eben dieser körperlicher Inhalt in Cubiczollen.

Von

Von Veränderung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche, und im Gegentheile der Decimalbrüche in gemeine.

§. 139.

Ein jeder gemeiner Bruch kann in einen Decimalbruch auf folgende Art verändert werden. Man setze am Ende zu dem Zähler eine 0 hinzu: dividire ihn alsdenn durch seinen Nenner: der Quotient wird die erste Decimalziffer seyn. Man multiplicire den Divisor durch den Quotienten: das Product ziehe man vom Dividendus ab: bleibt kein Rest, so ist der gefundene Decimalbruch dem gegebenen gleich; bleibt aber ein Rest, so setze man zu diesem Reste abermal eine 0: wiederhole die Division mit seinem Nenner; und dieses so lange, bis man nach einer Abziehung keinen Rest mehr bekommt. Geschieht dieses, so sind die bis dahin erhaltenen Decimalziffern dem gegebenen Bruche vollkommen gleich. Also ist $\frac{2}{5}=0,4$: und $\frac{3}{4}=0,75$.

Es ereignet sich aber nicht selten, daß immer ein Rest bleibe, soviel man immer Nullen hinzusetzt, und so oft man immer die Division wiederholt. In diesem Falle nun kann kein Decimalbruch gefunden werden, welcher dem gegebenen vollkommen gleich ist. Unterdessen kann man doch einen Decimalbruch finden, der dem gegebenen so nahe kömmt, als man

immer will, und für nöthig erachtet; denn, wenn man die Division dreymal wiederholt, und also drey Decimalziffern sucht, so fehlt man nicht mehr als um einen tausendesten Theil eines Ganzen. Wiederholt man die Division viermal, so fehlt man nicht mehr um einen zehntausendesten Theil eines Ganzen u. s. f. Also kann der Bruch $\frac{4}{7}$ in einen ihm vollkommen gleichen Decimalbruch niemal verändert werden. Jedoch, wenn man viermal eine 0 hinzusetzt, und also die Division viermal wiederholt, so wird es also hergehen.

```
7) 40 (0,5714
   35
   --
    50
    49
    --
     10
      7
     --
      30
      28
      --
       2
```

Und dieser Decimalbruch 0,5714 kommt dem gegebenen so nahe, daß er um keinen zehntausendesten Theil zu klein ist. Sollte man die Division noch öfter wiederholen, so würde man dem gegebenen Bruche immer noch näher kommen.

§. 140.

Es sieht also ein jeder selbst, daß man in Veränderung der gemeinen Brüche in Decimal-

cimalbrüche, nachdem man einige Decimalziffern gefunden hat, die Division unterbrechen kann, obwohl noch ein Rest geblieben ist. Denn, was liegt daran, ob man etwa um einen zehntausendesten Theil eines Guldens fehle oder nicht? Jedoch kann man hierinn keine allgemeine Regel geben, wieviel man Decimalziffern suchen müsse, ehe man abbrechen darf; denn dieses hängt von dem Gegenstande der Berechnung ab. Rechnet man von Kreuzern, so könnte man aufhören, sobald man die erste Decimalzahl gefunden hat: weil es ja genug ist, wenn man um keinen zehnten Theil eines Kreuzers fehlt. Rechnet man von Gulden, so könnte man abbrechen, nachdem man drey Decimalziffern gefunden hat; weil der Fehler von einem oder andern zehntausendesten Theil eines Gulden nicht mehr zu achten ist.

Dieses ist zu verstehen für jenen Fall, da die Rechnung schon am Ende ist; denn, wenn man den also beynahe gefundenen Bruch noch mit einer ganzen Zahl multipliciren müßte, so könnte der Anfangs kleine Fehler nach der Multiplication beträchtlich seyn; weil also, gleichwie der Bruch, so auch der Fehler desselben multiplicirt würde. Gesetzt, man hätte gefunden, ein Pfund einer gewissen Waare koste 3 Gulden und $\frac{4}{7}$ eines Gulden; ferner man hätte diesen Bruch in einen Decimalbruch verändert, und für den Werth eines

Pfundes angesetzt 3,571. Der Fehler würde sich auf 4 zehntausendeste Theile eines Gulden belaufen, welcher Fehler in der That nicht zu achten wäre. Ferner: man hätte 10000 Pfunde dieser Waare, und verlangte den ganzen Werth derselben zu wissen. Man müßte zu diesem Ende den Werth 3,571 eines Pfundes mit 10000 multipliciren: das Product würde seyn 35710 Gulden. Allein dieses Product wäre um mehr als 4 Gulden zu klein; weil der im ersten Decimalbruch steckende Fehler mit 10000 multiplicirt über 4 Gulden steigt. In diesem Falle dann merke man diese Regel. Man suche so viele Decimalziffern, bis man erkennt, daß der Fehler vor der Multiplication nicht mehr beträchtlich sey: und alsdenn suche man noch soviel, ja noch um eine mehr, als Ziffern im Multiplkator sind, welche Ganze vorstellen. Also muß man im vorigen Exempel erstens drey Decimalziffern suchen, weil einige tausendeste Theile eines Gulden noch beträchtlich sind: man muß über das noch fünf andere suchen, weil der also gefundene Bruch mit 10000 muß multiplicirt werden. Man wird also für den Werth eines Pfundes finden 3,57142857. Wenn man diesen mit 10000 multiplicirt, so bekommt man 35714,2857 als den Werth der ganzen Waare.

§. 141.

Die meisten aus jenen Dingen, die in der Rechnung vorkommen, pflegen nicht in 10, 100,

100, 1000 u. s. f. Theile abgetheilt zu werden. Wenn man also neben den Ganzen einen Decimalbruch bekommt, so weiß man nicht, was dieser Bruch austrage, wenn er nicht in einen andern verändert wird, der eine solche Zahl zum Nenner hat, in welche das Ganze, von dem damals die Rede ist, pflegt abgetheilt zu werden. Nun diese Veränderung muß auf eben die Art geschehen, wie oben gesagt worden. Man muß nemlich die Decimalziffern mit dem Nenner multipliciren, den man dem neuen Bruche geben wolle, und das Product mit dem Nenner eines Decimalbruchs dividiren, oder, weil ein Decimalbruch allezeit die Einheit mit einigen Nullen zum Nenner hat, so viele Ziffern vom Producte rechter Hand abschneiden, als Nullen in dem Nenner sind. Die überbleibenden Ziffern sind der Zähler des neuen Bruchs. Z. E. Man soll 0,5 einer Stunde in einen andern Bruch verändern, dessen Nenner 60 ist. Man multiplicire 5 durch 60: das Product ist 300. Dieses dividire man durch 10, oder was eines ist, man schneide die letzte Ziffer ab: so bleibt 30 der Zähler des verlangten neuen Bruchs, welcher also ist $\frac{30}{60}$, das ist, 30 Minuten einer Stunde.

Hier sind noch einige Exempel. Wie viele Kreuzer gilt der Bruch 0,9 eines Gulden? Man multiplicire 9 durch 60. Vom Product 540 schneide man die letzte Ziffer ab, so bleiben $\frac{54}{60}$, das ist, 54 Kreuzer.

Wie viele Stunden, Minuten und Secunden gilt der Bruch 0,6256944 eines Tags? Weil ein Tag in 24 Stunden pflegt eingetheilt zu werden, so muß man diesen Bruch in einen andern verändern, dessen Nenner 24 ist. Man multiplicire also 6256944 durch 24, das Product ist 150166656. Von diesem schneide man 7 Ziffern ab, weil der Nenner des gegebenen Bruchs neben dem 1 sieben Nullen hat, so bleiben 15 Stunden. Die abgeschnittenen Ziffern 0166656 sind ein Decimalbruch einer Stunde. Um nun diesen in Minuten zu verändern, multiplicire man ihn mit 60. Das Product ist 9999360. Man schneide sieben Ziffern ab, so bleibt nichts übrig. Man bekommt also keine Minute. Die abgeschnittenen sieben Ziffern 9999360 sind ein Decimalbruch einer Minute. Um diesen in Secunden zu verändern, multiplicire man ihn mit 60, das Product ist 599961600. Man schneide sieben Ziffern ab, es bleiben 59 Secunden. Die abgeschnittenen sieben Ziffern sind ein Decimalbruch einer Secunde, welchen man in Terzen verändern kann, wenn man es für nöthig erachtet. Man würde finden 59 Terzen, weil also 59 Terzen sehr nahe eine Secunde gelten, so könnte man sie ohne beträchtlichen Fehler für eine Secunde annehmen. Man hat also 60 Secunden: und weil 60 Secunden eine Minute ausmachen, so erkennet man, daß 0,6256944 eines Tags 13 Stunden und eine Minute gelten.

Ende des ersten Theiles.

Des zweyten Theiles
Erster Abschnitt.
Von den Größen.

§. 1.

Unter einer Größe versteht man alles dasjenige, was sich vermehren, oder vermindern läßt, oder zu der etwas hinzugethan, oder davon weggenommen werden kann.

§. 2.

Alle Größen, welche das Zeichen + (so plus oder mehr ausgesprochen wird) vor sich haben, nennt man bejahende oder positive Größen: hingegen alle Größen, welche das Zeichen — (so minus oder weniger ausgesprochen wird) vor sich haben, nennt man verneinende oder negative Größen.

§. 3.

Durch die bejahende oder positiven Größen stellt man sich den würklichen Besitzstand einer Sache vor; so wie im Gegentheile die verneinenden oder negativen Größen den Mangel desselben andeuten.

§. 4.

Einfache oder einzelne Größen sind diejenigen, die nur durch einen Buchstaben angezeigt werden; zusammengesetzte Größen aber, so aus zwey oder auch aus mehreren Größen durch die Zeichen + oder — verbunden oder abgesondert werden.

§. 5.

Diejenige Wissenschaft, welche aus einigen gegebenen Größen andere ihres gleichen, von denen in Ansehung der gegebenen etwas bekannt gemacht wird, durch gewiße Gleichungen zu finden, lehrt, wird die **gemeine Algebra** genannt.

§. 6.

Die Buchstaben-Rechenkunst zeigt, wie man statt der Ziffern allgemeine Zeichen der Größen sich bedienen, und damit die gewöhnlichen Rechnungsarten verrichten könne.

§. 7.

Alle bekannte Größen werden mit den Anfangsbuchstaben des Alphabeths; die unbekannten Größen aber mit den letzten Buchstaben des Alphabeths benennet.

§. 8.

Diejenige Zahlen, welche den Buchstaben vorgesezt werden, heißt man Coeficienten. Z. E. 4a sey die Größe, so ist 4 der Coeficient.

§. 9.

Diejenige Zahlen, welche den Größen oben angesezt werden, nennt man die Exponenten der Größen. Z. E. Bey a^4 ist die Zahl der Exponent von a.

Zweyter Abschnitt.

Von den vier Rechnungsarten mit ganzen Größen.

§. 10.

Was von der Addition bey den Zahlen gelehrt worden ist, das nemliche gilt auch bey der Algebra, und sind hiebey die drey Fälle wohl zu merken. Als:

1) sind die Größen von einerley Art, und haben dieselbe einerley Zeichen:

2) sind die Größen von einerley Art; haben aber verschiedene Zeichen: und

3) sind die Größen nicht von einerley Art; und haben zum Theil einerley oder aber verschiedene Zeichen.

 §. 11.

§. 11.

Bey dem ersten Fall, wenn die Größen von einerley Art sind, und auch einerley Zeichen haben, wird die Addition wie in der gemeinen Rechenkunst verrichtet. Z. E.

	a	$-a$	$5b$	$-7bc$
	a	$-a$	$3b$	$-8bc$
Summe	$2a$	$-2a$	$8b$	$-15bc$

	$3a+5b$	$3a-5b$	$6ab+12$
	$2a+7b$	$2a-7b$	$3ab+24$
Summe	$5a+12b$	$5a-12b$	$9ab+36$

	$a+2b-c+5d$
	$6a+3b-5c+2d$
Summe	$7a+5b-6c+7d$

§. 12.

Im zweyten Fall; da die Größen, wie im ersten, von einerley Art sind; aber verschiedene Zeichen haben, ziehe man von der größern Größe die kleinere Größe ab, und zu dem Rest setze man das Zeichen der größern Größe. Z. E.

	$5a$	$-5a$	$7bc$	$-9abd$
	$-3a$	$+3a$	$-6bc$	$+7abd$
Summe	$+2a$	$-2a$	$+bc$	$-2abd$

	$+7a-5b$	$-8ab-7bc+15$
	$-5a+7b$	$+12ab+7b-24$
Summe	$2a+2b$	$4ab - - - 9$

	$2ac - 3bd + 2cg - 4def$
	$3ac + 5bd - 8cg - 2def$
Summe	$5ac + 2bd - 6cg - 6def$

§. 13.

Wenn man die Natur der Größen genau kennt, so wird man die Ursache dieser Regel leicht einsehen. Denn alle Größen, so — oder minus haben, fehlen, im Gegentheile alle Größen, die + oder plus haben, sind wirklich vorhanden. Soll man also von beyder Art addiren, so wird durch die leztere der Mangel aufgehoben, und muß folglich die Addition in eine Subtraction verwandelt werden.

§. 14.

Soll man nach dem dritten Fall Größen von verschiedener Art und von verschiedenen Zeichen zusammen addiren, so schreibe man die Größen mit Beybehaltung ihrer gegebenen Zeichen neben einander hin. Z. E.

	a	a	$4b+7cd$
	b	$-b$	$4a-10$
Summe	$a+b$	$a-b$	$4b+7cd+4a-10$

$$\begin{array}{ll} & a+4b+c-3d \\ & -4e-8f+h+g \\ \hline \text{Summe} & a+4b+c-3d-4e-8f+h+g \end{array}$$

In folgenden Exempeln sind alle drey Fälle angebracht.

$$\begin{array}{l|l} \left\{\begin{array}{l} a^2+2ab+b^2 \\ \quad -4ab \end{array}\right. & \begin{array}{l} 8ab+bc-37 \\ -7ab-bc+42-6d \end{array} \\ \hline \text{Summe } a^2-2ab+b^2 & ab \quad +5-6d \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \left\{\begin{array}{l} 3a^2+4abc-bb+30 \\ 2bb-3a^2-2abc-25 \\ dd+2a^2-3abc-3 \end{array}\right. \\ \hline \text{Summe} & 2a^2-abc+b^2+a^2+2 \end{array}$$

§. 15.

Die Subtraction geschieht in der Algebra, wie in der gemeinen Rechenkunst, wenn die Größen von einerley Art, und wenn die Zeichen von einerley Art sind, und die kleinere Größe von der größern Größe abgezogen werden kann. Z. E.

$$\begin{array}{ll} & 8a-3b+7c-8d+4f \\ & 5a-2b+6c-3d+2f \\ \hline \text{Rest} & 3a-\ b+\ c-5d+2f \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & 5ab-9bd-3dc-fg \\ & 2ab+3bd-2dc-fg \\ \hline \text{Rest} & 3ab+6bd-\ dc-- \end{array}$$

§. 16.

§. 16.

In dem Fall aber, wenn die Größen einerley Zeichen haben, und man die größere Größe abziehen soll, so ziehe man die kleinere von den größern ab, und setze man zu dem Rest das Zeichen +, wenn beeden — haben; hingegen —, wenn beede Größen + haben. Z. E.

$$\begin{array}{r} 4a - 3b + 7c - 2d \\ 6a - 4b + 9c - 5d \\ \hline -2a + b - 2c + 3d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25abc - 3cd + 13fa \\ 28abc - 9cd + 24fa \\ \hline -3abc + 6cd - 11fa \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5gh + 2ahcde - 18bf - 4ab \\ 7gh + 5ahcde - 27bf - 6ab \\ \hline -2gh - 3ahcde + 9bf + 2ab \end{array}$$

§. 17.

Sind die Zeichen verschieden, so addire man die Größen, die man subtrahiren soll, und der Summe gebe man das Zeichen derjenigen Größe, von welcher die Subtraction geschehen soll. Z. E.

$$\begin{array}{r} 5a + 7b - 3c + 9d \\ -3a - 2b + 2c - 4d \\ \hline 8a + 9b - 5c + 13d \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -ab - 3bc + 8ad \\ +4ab - 3ad + 4bc \\ \hline -5ab + 11ad - 7bc \end{array}$$

Exempel für alle drey Fälle.

Von	$2a$	$-2a$	$-15bc$	$5a+12b$
subtrahire man	a	$+3a$	$-8bc$	$2a+7b$
so ist der Rest	a	$-5a$	$-7bc$	$3a+5b$

Von	bc	$-2abd$
subtrahire man	$-6bc$	$+7abd$
so ist der Rest	$+7bc$	$-9abd$

Von	$4ab-9$	$a^2-2ab+b^2$
subtrahire man	$12ab+7bc-24$	$-4ab$
so ist der Rest	$-8ab-7bc+15$	$a^2+2ab+b^2$

Von	$ab+5-6d$
subtrahire man	$-7ab-bc+42-6d$
so ist der Rest	$8ab+bc-37$

Von	$2a+2b$	$a+b$	$5bc+3ad$
subtrahire man	$-5a+7b$	$a-b$	$5bc-4ad$
so ist der Rest	$7a+5b$	$+2b$	$7ad$

Von	$8a+5bd+25$	$c+13$
subtrahire man	$7a-3bd-12$	$3a-b-2c$
so ist der Rest	$a+8bd+37$	$3c+13-3a+b$

§. 18.

§. 18.

Die Multiplication hat vier Fälle.

Erster Fall. Wenn vor den Buchstaben, welche mit einander sollen multiplicirt werwerden, einerley Zeichen ohne Coeficient stehen, so schreibt man diese Buchstaben neben einander mit dem Zeichen +, wie man hier sieht.

Exempel.

Multiplicandus	a	$-a$	$a+b$	$-a-b$
Multiplicator	a	$-b$	d	$-d$
Product	ab	$+ab$	$ad+bd$	$ad+bd$

Zweyter Fall. Wenn die Buchstaben Coeficienten vor sich haben, so multiplicirt man man diese durch einander, und setzt das Product der Coeficienten vor dem Product der Buchstaben.

Exempel.

Multiplicandus	$5a$	$-6d$	$3a+2b$
Multiplicator	$3b$	$-7b$	6
Product	$15ab$	$+42bd$	$18a+12b$

Multiplicandus	$a+b$
Multiplicator	$5b$
Product	$5ab+5bb$

Dritter Fall. Wenn der Multiplicandus und Multiplicator verschiedene Zeichen vor sich haben,

haben, so bekömmt das Product das Zeichen (−).

Exempel.

Multiplicandus	a	$-6d$	$4a - 7b$
Multiplicator	$-b$	$+7a$	$+3f$
Product	$-ab$	$-42ad$	$12af - 21bf$

Vierter Fall. Wenn ein Buchstabe, welcher einen Exponenten bey sich hat, mit eben demselben Buchstaben (als b mit b), der gleichfalls einen Exponenten hat, soll multiplicirt werden; so wird im Product dieser Buchstabe nur einmal geschrieben, die Exponenten aber werden addirt, daß also die Summe beyder Exponenten der neue Exponent wird.

Exempel.

Multiplicandus	b^2	$a^3 - b$	$-c + 3b^2$
Multiplicator	b^3	b^2	$+3c^2$
Product	b^5	$a^3b^2 - b^3$	$+3c^3 - 9b^2c^2$

Wenn der Multiplicator aus mehreren Gliedern besteht, so müssen alle Glieder des Multiplicandus durch ein jedes Glied des Multiplicators multiplicirt werden. Man bekommt also so viele Partialproducte, als viele Glieder der Multiplicator hat. Diese Partialproducte müssen alsdenn zusammen addirt werden: die Summe ist das verlangte ganze Product. Z. Ex.

Gesetzt:

Gesetzt: diese zwo Größen $2a+b-d$ und $a-b$ sollen durch einander multiplicirt werden. Man schreibe die letzte Größe, als den Multiplicator unter die erste, wie unten steht. Ziehe man eine Linie darunter. Multiplicire man mit a dem ersten Gliede des Multiplicators alle Glieder des Multiplicandus, und so entsteht das erste Partialproduct $2a^2+ab-ad$. Ferners multiplicire man mit dem zweyten Gliede des Multiplicators $(-b)$ alle Glieder des Multiplicandus, und so bekommt man das zweyte Partialproduct $-2ab-b^2+bd$. Addire man beyde Partialproducte zusammen: die Summe $2a^2-ab-ad-b^2+bd$ ist das verlangte ganze Product.

Multiplicand. $2a+b-d$
Multiplicat. $a-b$

$2a^2+ab-ad$ das erste Partialproduct.
$-2ab-bb+bd$ das zweyte Partialproduct.

$2a^2-ab-ad-bb+bd$ das ganze Product.

Ueberhaupts wenn Größen mit einerley oder mit verschiedenen Zeichen multiplicirt werden sollen, so ist die allgemeine Regel diese, daß gleiche Zeichen +, verschiedene aber — geben. Z. E.

$$\begin{array}{r}
a+b+c \\
a+b+c \\
\hline
aa+ab+ac \qquad\qquad \\
+ab+bb+bc \qquad \\
+ac+bc+cc \\
\hline
aa+2ab+bb+2ac+2bc+cc
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
a+b-c \\
a-b-c \\
\hline
aa+ab-ac \qquad\qquad \\
-ab-bb+bc \qquad \\
-ac-bc+cc \\
\hline
aa-bb-2ac+cc
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
4a-3b \\
3a+2b \\
\hline
12aa-9ab \qquad \\
+8ab-6bb \\
\hline
12aa-ab-6bb
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
-5b-3c+4d \\
-2d+b-c \\
\hline
+10bd+6cd-8dd \qquad\qquad\qquad\qquad \\
-5bb-3cb+4bd \qquad\qquad \\
+5cb+3cc-4cd \\
\hline
+14bd+2cd-8dd-5bb+2cb+3cc
\end{array}$$

Mul-

Multiplicandus $2ab - 4ac + ad$
Multiplicator $3ab - 5ac + 2ad$

$$\begin{array}{r} 6a^2b^2 - 12a^2bc + 3a^2bd \\ -10a^2bc + 20a^2c^2 + 5a^2cd \\ 4a^2bd - 8a^2cd + 2a^2d^2 \end{array}$$ Partialproducte

$6a^2b^2 - 22a^2bc + 7a^2bd + 20a^2c^2$
$-13a^2cd + 2a^2d^2$ das ganze Product.

$$\begin{array}{l} 5a^3b - 2ab^3 + 4a^2c^2 \\ 2a^3b - ab^3 + 3a^2c^2 \\ \hline 10a^6b^2 - 4a^4b^4 + 8a^5bc^2 \\ -5a^4b^4 + 2a^2b^6 - 4a^3b^3c^2 \\ 15a^5bc^2 - 6a^3b^3c^2 + 12a^4c^4 \\ \hline 10a^6b^2 - 9a^4b^4 + 23a^5bc^2 + 2a^2b^6 \\ -10a^3b^3c^2 + 12a^4c^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2a^4x^2 - 3b^4y^2 \\ 2a^4x^2 + 3b^4y^2 \\ \hline 4a^8x^4 - 6a^4b^4y^2x^2 \\ 6a^4b^4y^2x^2 - 9b^8y^4 \\ \hline 4a^8x^4 - 9b^8y^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5ab + 3ac - c^2 \\ -5ab + 3ac - c^2 \\ \hline -25a^2b^2 - 15a^2bc + 5abc^2 \\ +15a^2bc + 9a^2c^2 + 3ac^3 \\ -5abc^2 - 3ac^3 + c^4 \\ \hline -25a^2b^2 + 9a^2c^2 - 6ac^3 + c^4 \end{array}$$

 §. 19.

§. 19.

Daß + mit + multiplicirt wieder + im Product geben müsse; ingleichen + mit — oder — mit + das Zeichen — gebe, ist nicht schwer zu begreifen. Daß aber — mit — multiplicirt in dem Producte + ist, scheint nicht sogleich klar zu seyn. Durch ein Exempel in Zahlen kann diese Schwierigkeit am besten gehoben werden. Z. E. Man soll 4—3 durch — 3 multipliciren, das heißt, man soll den Mangel — 3 so vielmal nehmen, als 4—3 Einheiten hat, das ist, 1 mal. Weil, wenn man Anfangs 4 mit — 3 multiplicirt, man den Mangel 4 mal und folglich dreymal zuviel genommen, so muß man denselben wieder dreymal addiren, folglich giebt — 3 mit — 3 zum Product + 9.

§. 20.

Die Multiplication ist immer die Probe über die Division, das heißt, wenn man den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt, so muß der Dividendus herauskommen. Hieraus folgt nun ganz natürlich, daß bey der Division die nemliche Regel statt finden muß, wie bey der Multiplication, nemlich: **Einerley Zeichen geben + ungleiche oder verschiedene Zeichen aber —.** Z. E. Man soll die Größe *a b* durch *a* dividiren, so muß der Quotient *b* seyn, weil *a* mit *b* multiplicirt

zum

zum Producte *a b* giebt; und hieraus folgt auch, daß, wenn *a b* durch *b* dividirt werden soll, der Quotient *a* seyn müsse.

Oder:

Die Division ist der Multiplication entgegengesetzt: sie hat ebenfalls vier verschiedene Fälle.

Erster Fall. Wenn der Dividendus und Divisor beyde einerley Zeichen, und keine Coeficienten haben, so werden jene Buchstaben des Dividendus, welche auch im Divisor sich einfinden, ausgelöscht: die übergebliebenen Buchstaben des Dividendus mit dem Zeichen + sind der Quotient.

Exempel.

Dividendus	ab	$-ab$	$ad+bd$	$-ad-bd$
Divisor	b	$-b$	d	$-d$
Quotient	a	$+a$	$a+b$	$a+b$

Zweyter Fall. Wenn die Zeichen des Dividendus und des Divisors verschieden sind, so setze man vor dem Quotienten das Zeichen —

Exempel.

Dividend.	ab	$-ab$	$-ab-bd$	$abc+bcd+bcf$
Divisor	$+a$	$-a$	$+b$	$-bc$
Quotient	$-b$	$-b$	$-a-d$	$-a-d-f$

Dritter Fall. Wenn die Buchstaben des Dividendus und des Divisors Coeficienten vor sich haben, so werden diese durch einander dividiret, wie in der gemeinen Arithmetik.

Exempel.

Dividendus	$15ab$	$42bd$	$12af-21bf$
Divisor	$3a$	$-7b$	$3f$
Quotient	$5b$	$-6d$	$4a-7b$

Vierter Fall. Wenn ein Buchstabe in dem Dividendus und Divisor steht, und einen Exponenten hat, so wird der Exponent des Divisors von dem Exponenten des Dividendus abgezogen, und in dem Quotienten eben dieser Buchstabe geschrieben mit einem Exponenten, der dem Reste gleich ist.

Exempel.

Dividendus	a^3	b^4c^2	b^3c	$-8b^5c^3d$
Divisor	a^2	b^2c	$-b$	$+4b^3c^3$
Quotient	a	b^2c	$-b^2c$	$-2b^2d$

Erste Anmerkung. In diesem letzten Exempel sieht man, daß, wenn ein Buchstabe in dem Divisor und Dividendus den nemlichen Exponenten hat, derselbe in dem Quotienten gar nicht geschrieben wird.

Zweyte Anmerkung. Wenn sowohl die Buchstaben als Coeficienten des Dividendus

und

und Divisors die nemlichen sind, so ist der Quotient 1.

Exempel.

Dividendus	ab	$7ab+5bc$	$8ab+4d$
Divisor	ab	$7ab+5bc$	$-8ab-4d$
Quotient	1	1	-1

Dritte Anmerkung. Wenn der Divisor einen Buchstaben hat, der nicht in dem Dividendus steht, oder wenn ein Buchstabe in dem Divisor einen größern Exponenten hat, oder endlich, wenn der Coeficient des Divisors nicht genau und ohne Rest in dem Coeficienten des Dividendus enthalten ist, so kann die Division nicht genau verrichtet werden. In diesem Falle schreibt man den Dividendus und Divisor auf die Art eines Bruchs unter einander.

Exempel.

Dividendus	$8ab$	$5ab$	$5a$
Divisor	$4ac$	$5a^2b$	$3a$
Quotient	$\frac{8ab}{4ac}$	$\frac{5ab}{5a^2b}$	$\frac{5a}{3a}$

§. 21.

In dem Fall aber, wenn die Division nicht würklich vorgenommen werden kann, so schreibt man die Größen als einen Bruch.

Z. Ex. $\frac{a}{b}$ heißt soviel, als a soll durch b dividirt werden.

Diese Regeln zu beweisen, ist nicht nöthig, weil es fast eben so geschehen kann, wie in der Multiplication. Es wird einem jeden leicht seyn, die dort gegebenen Beweise hier anzuwenden. Die vier Regeln sind erklecklich, so oft der Divisor nur aus einem Gliede besteht: hat er aber mehrere Glieder, so merke man, was itzt folgt.

Ordnung halber schreibe man den Divisor zu der Linken des Dividendus, und scheide beyde durch einen Verticalstrich, oder durch eine halbe Kreislinie. Zweytens, aus dem Dividendus wähle man welch immer ein Glied, welches genau durch ein Glied des Divisors, sey es ebenfalls, was für eines es wolle, kann dividirt werden. Den Quotienten, der aus dieser Division entsteht, schreibe man zur Rechten des Dividendus, nachdem man zuvor einen halben Kreis gezogen hat. Drittens, mit dem Quotient, den man also gefunden hat, multiplicire man den ganzen Divisor: das Product wird unter den Dividendus geschrieben, und davon abgezogen, oder, welches eines ist, das Product wird mit Veränderung aller Zeichen angeschrieben, und alsdenn zu dem Dividendus addirt: also bekommt man einen neuen Dividendus. Viertens, aus diesem

sem wähle man sich wieder ein Glied, welches taugt, durch ein frey erwähltes Glied des Divisors genau dividirt zu werden. Der Quotient wird abermal zur Rechten neben den vorigen hin geschrieben mit seinem gehörigen Zeichen: und so fährt man immer fort, bis nach der Subtraction nichts mehr übrig bleibt. Dieß alles wird in einem Exempel verständlicher werden.

Es sey der Dividendus $ab^2+abd+acd-ac^2$, der Divisor $ab+ad-ac$. Schreibe man beyde neben einander, wie man unten sieht. Dividire man ein Glied des Dividendus, z. Ex. ab^2 durch ein Glied des Divisors, welches zur genauen Division tauglich ist, als ab. Den Quotienten b setze man zur Rechten. Mit diesem Quotienten b multiplicire man den ganzen Divisor, das Product wird seyn $ab^2+abd-abc$: dieses schreibe man unter den Dividendus, aber mit Veränrung aller Zeichen: man wird also unterschreiben $-ab^2-abd+abc$. Nach gezogener Linie addire man dieses zu dem Dividendus, so entsteht ein neuer Dividendus $abc+acd-ac^2$. Was immer für ein Glied desselben, z. Ex. durch acd dividire man durch ein Glied des Divisors, welches zu einer genauen Division taugt, z. E. durch ad. Den Quotienten $+c$ setze man neben den vorhergefundenen Quotienten hin. Durch diesen neuen Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor. Das

Product $abc+acd-ac^2$ schreibe man mit veränderten Zeichen unter den Dividendus. Nach verrichteter Addition bleibt nichts übrig. Die Division ist also vollbracht, und $b+c$ ist der verlangte Quotient.

Divisor	Dividendus	Quot.
$ab+ad-ac$	$ab^2\ abd+acb-ac^2$	$b+c$
	$-ab^2-abd+abc$	
	$abc+acd-ac^2$	
	$-abc-acd+ac^2$	
	0	

§. 22.

Soll eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden; so theile man ein jedes Glied besonders. Z. Ex. Es soll $6a-8b+4c$ durch 2 getheilt werden; so giebt der Quotient $3a-4b+2c$ und die Rechnung steht: $2|6a-8b+4c|3a-4b+2c$.

oder allgemein:

$$a|aa-2ab|a-2b$$
$$aa-2ab$$
$$*\ *\quad *\ *$$

§. 23.

Ist aber der Divisor selbst eine zusammengesetzte Größe, so hat die Division mehr Schwierigkeiten, weil dieselbe öfters würklich gesche-

geschehen kann, wo es nicht zu vermuthen ist. Z. E.

Es sey der Divisor $a-b$, und das Dividend $ac-bc$; so muß c der Quotient seyn, und das Exempel wird also stehen:

$$a-b \mid ac-bc \mid c$$
$$ac-bc$$
$$\cdot \quad \cdot$$

$$2a-3b \mid 6aa-9ab \mid 3a$$
$$6aa-9ab$$
$$\cdot \quad \cdot$$

$$a+b \mid aa+3ab+2bb \mid a+2b$$
$$aa+ab$$
$$\cdot \quad +2ab+2bb$$
$$+2ab+2bb$$
$$\cdot \quad \cdot$$

$$a+b \mid aa-bb \mid a-b$$
$$aa+ab$$
$$\cdot \quad -ab-bb$$
$$-ab-bb$$
$$\cdot \quad \cdot$$

$$3a-2b \mid 18aa-8bb \mid 6a+4b$$
$$18aa-12ab$$
$$+12ab-8bb$$
$$+12ab-8bb$$
$$\cdot \quad \cdot$$

In

In dieser Weise zu dividiren könnte allein diese Sorge einen Anfänger verwirren, wie er in dem Dividendus und Divisor allezeit solche Glieder finden könne, welche zu einer genauen Division taugen. Dieser Beschwerniß zu begegnen merke man folgendes. Erstens: erwähle man nach Belieben einen Buchstaben, welcher sowohl in dem Dividendus als Divisor befindlich ist, und ordne man alle Glieder des Dividendus und Divisors nach diesem Buchstaben also, daß jenes das erste Glied sey, in welchem dieser Buchstabe den größten Exponenten hat; das zweyte Glied jenes, indem dieser Buchstabe einen Exponenten hat, der dem größten am nächsten kömmt u. s. f. Zweytens: dividire man alsdenn immer das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors: in dem übrigen fahre man fort, wie oben ist gesagt worden.

Anmerkung.

Wenn man durch die Addition einen neuen Dividendus erhält, muß man jederzeit sorgen, daß er nach eben demselben Buchstaben, den man Anfangs erwählet hat, geordnet bleibe: läßt sich alsdenn das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors nicht genau theilen, so ist es ein richtiges Zeichen, daß der gegebene Dividendus durch den gegebenen Divisor nicht genau könne dividirt werden. Wir wollen einige Exempel herse:

herſetzen, in welchen der Dividendus und Diviſor ſchon nach einem gewiſſen Buchſtaben geordnet ſind: im erſten nach x: im zweyten nach c: im dritten nach a.

Diviſ.	Dividendus	Quotient.
$x-3$	x^5-243	$x^4+3x^2+9x^2+27x+81$
	$-x^5+3x^4$	
	$3x^4-243$	
	$-3x^4+9x^3$	
	$9x^3-243$	
	$-9x^3+27x^2$	
	$27x^2-243$	
	$-27x^2+81x$	
	$81x-243$	
	$-81x+243$	
	0	

Diviſor

Divisor	Dividendus	Quotient
$2c^2+3bc-bb$	$4c^4-9b^2c^2+6b^3c-b^4$	$2c^2-3bc+b^2$
	$-4c^4-6b\ c^3+2b^2c^2$	
	$-6b\ c^3-7b^2c^2+6b^3c-b^4$	
	$+6b\ c^3+9b^2c^2-3b^3c$	
	$2b^2c^2+3b^3c-b^4$	
	$-2b^2c^2+3b^3c+b^4$	
	0	

Divisor	Dividendus	Quotient
$a^2-2ab+6b^2$	$2a^4-7a^3b+22a^2b^2-26ab^3+24b^4$	$2a^2-3ab+4b^2$
	$-2a^4+4a^3b-12a^2b^2$	
	$-3a^3b+10a^2b^2-26ab^3+24b^4$	
	$+3a^3b-6a^2b^2+18ab^3$	
	$4a^2b^2-8ab^3+24b^4$	
	$-4a^2b^2+8ab^3-24b^4$	
	0	

Dritter Abschnitt.

Von den Brüchen.

§. 24.

Ein Bruch ist ein gewisser Theil eines Ganzen: z. Ex. es soll *a* durch *b* getheilt werden; so wird der Quotus $\frac{a}{b}$ angedeutet, welche Schreibart man einen Bruch nennt, wovon die obere Größe der **Zähler**, die untere aber der **Nenner** heißt.

§. 25.

Alle Brüche, in welchen der Zähler größer ist als der Nenner, heißen **unächte Brüche:** hingegen alle Brüche, deren Zähler kleiner ist als der Nenner, **ächte Brüche.**

§. 26.

Je größer der Nenner wird, desto kleiner wird der Bruch; und obgleich der Nenner noch so groß angenommen wird, so verschwindet der Bruch doch niemals ganz, oder wird niemals zu nichts.

§. 27.

Wird der Nenner eines Bruchs so weit vergrößert, daß er sich über alle Begriffe der mensch=

menschlichen Einsicht erstreckt, so sagt man, der Bruch sey unendlich groß: welches Wort unendlich soviel bedeutet, daß man mit dem gemeldten Bruch niemals zu Ende komme. Das Zeichen ∞ zeigt eine unendlich große Zahl an: und dieser Begriff vom Unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemerken, weil er in der Folge von der größten Wichtigkeit ist.

Von der der Addition und Subtraction der Brüche.

§. 28.

Haben die Brüche einerley Nenner, so hat die Addition, ingleichem die Subtraction derselben ganz und gar keine Schwierigkeit, und es mögen soviel Brüche vorhanden seyn, als immer wollen, so werden dieselbe blos durch das Zeichen + zusammengezählt. Z. Ex.

$$\frac{a}{b} + \frac{2c}{b} + \frac{3d}{b} = \frac{a + 2c + 3d}{b}$$

§. 29.

Sind aber die Nenner ungleich, so müssen die Brüche in andere verwandelt werden, deren Nenner einander gleich sind. Auf die allgemeine Art wird dieses folgendermassen verrichtet. Es seyen zum Exempel die vorgegebenen

benen Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Man multiplicire nemlich den ersten Bruch oben und unten, oder welches einerley ist, den Zähler und Nenner des ersten Bruches, mit dem Nenner des andern Bruches d, so heißt der neue Bruch $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch eben so groß als $\frac{a}{b}$ ist. Hierauf multiplicire man den Zähler und Nenner des andern gegebenen Bruches mit b, so erhält man $\frac{bc}{bd}$, welcher eben so groß als $\frac{c}{d}$ ist, und folglich sind die beyden Brüche unter einerley Benennung gebracht. Sollen diese beyden Brüche zusammen addirt werden, so ist ihre Summe $\frac{ad+bc}{bd}$: und der Unterschied, wenn dieselbe von einander sollen subtrahirt werden, ist $\frac{ad-bc}{bd}$.

Von der Multiplication und Division der Brüche.

§. 30.

Sollen Brüche mit ganzen Zahlen oder Größen multiplicirt werden, so wird blos der Zähler des Bruches mit der gegebenen Größe mul-

multiplicirt, und der Nenner bleibt unverändert. Z. Ex. Es soll der Bruch $\frac{a}{b}$ mit c multiplicirt werden, so ist das Product $\frac{ac}{b}$.

§. 31.

Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl dividirt werden, so darf man nur den Nenner desselben mit der gegebenen Zahl oder Größe multipliciren, und den Zähler unverändert lassen. Z. E. Es soll der Bruch $\frac{a}{c}$ durch c multiplicirt werden, so ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

§. 32.

Bey Multiplicirung eines Bruches mit einem andern Bruch ist weiter nichts zu beobachten, als daß man erstlich die Zähler und hernach die Nenner mit einander multiplicirt. Z. Ex. Es soll der Bruch $\frac{a}{b}$ mit dem Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden; so ist das gesuchte Product $\frac{ac}{bd}$.

§. 33.

§. 33.

Bey Dividirung eines Bruches in einen andern geschieht die Division blos in dem Zähler, wenn die Brüche gleiche Nenner haben. Haben aber die Brüche ungleiche Nenner, so multiplicire man den Zähler des Dividens mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividends mit dem Zähler des Divisors, so giebt jenes Product den Zähler, und dieses den Nenner zum Quotienten. Z. Ex. Man soll den Bruch $\frac{a}{b}$ durch den Bruch $\frac{c}{d}$ dividiren, so ist $\frac{ad}{bc}$ der Quotient.

§. 34.

Eben diese Regel für die Division kann noch bequemer eingerichtet werden. Man kehre nemlich den Bruch, mit dem dividirt werden soll, um, so daß desselben Nenner oben, und dessen Zähler unten steht. Alsdenn multiplicire man mit diesem umgekehrten Bruch den gegebenen Bruch, in welchen dividirt werden soll, so erhält man den Quotienten. Z. Ex. Man soll $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, so ist $\frac{d}{c}$ der umgekehrte Bruch; dieser mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt, giebt zum Product $\frac{ad}{bc}$, welches der gesuchte Quotient ist.

Vierter Abschnitt.

Von den Quadratzahlen, von Ausziehung der Wurzeln, und von den Irrationalgrößen.

§. 35.

Eine jede Größe in sich multiplicirt giebt zum Product ein Quadrat, oder die andere Potenz, oder auch Dignität. Die Größen, daraus das Quadrat entstanden, wird die Quadratwurzel genennt. Z. Ex. a mit a multiplicirt, giebt zum Product aa, oder das Quadrat, und a ist die Quadratwurzel.

§. 36.

Multiplicirt man die andere Potenz mit der Wurzel, so giebt das Product die dritte Potenz oder Cubus. Multiplicirt man die dritte Potenz wieder mit der Wurzel, so kommt die vierte Potenz oder Dignität heraus, u. s. w.

§. 37.

Der Grad der Potenz oder Dignität einer Größe wird durch eine kleine Ziffer, wenn dieselbe bestimmt angegeben ist; im Gegentheil, wenn dieselbe nicht bestimmt ist, durch einen kleinen Buchstaben oberhalb zur rechten Hand an diejenige Buchstaben gesetzt, mit welchen die

die Größen benennt sind. Z. Ex. Die zweyte, dritte, vierte 2c. Dignität oder auch n Dignität wird angedeutet, a^2, a^3, a^4, a^n. Diese Zahlen nennt man die Exponenten der Dignitäten.

§. 38.

Will man eine Dignität durch eine andere Dignität von eben der Wurzel multipliciren, so darf man nur ihre Exponenten zusammen addiren. Z. Ex. Es soll a^2 mit a^3 multiplicirt werden, so ist das Product $a^{2+3} = a^5$. a^n mit $a^m = a^{n+m}$.

§. 39.

Soll man eine Dignität mit einer andern Dignität dividiren, so darf man blos ihre Exponenten von einander subtrahiren. Z. Ex.

$$a^6 : a^2 = a^{6-2} = a^4$$
$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

§. 40.

Soll die Dignität einer Größe zu einer andern Dignität erhoben werden, so multiplicire man den Exponenten der ersten mit den Exponenten der andern. Z. Ex. Es soll a^2 zur vierten Dignität erheben; so multiplicire man 2 mit 4, so ist a^8 die gesuchte Dignität; oder x^m zu n, so ist $x^{m.n}$ die gesuchte Dignität.

§. 41.

Die Wurzel aus einer gegebenen Dignität ausziehen, heißt, diejenige Größe finden, welche zu einer gewissen Dignität erhoben worden ist: will man aus einer gegebenen Dignität eine verlangte Wurzel ziehen, so darf man nur ihren Exponenten durch den Exponenten der Wurzel dividiren. Z. E. Die Wurzel der vierten Dignität aus x^{12} ist x^3 oder allgemein die Wurzel m aus x^n ist $^{n:m}$.

Anmerkung.

Wenn man aus einer Größe die Wurzel ausziehen soll, dergleichen sie nicht hat, so setzt man folgendes Wurzelzeichen vor dieselbe, und darüber den Exponenten der Wurzel, z. E. die Quadratwurzel von a, $\sqrt{a}$, die Cubicwurzel von a $\sqrt[3]{a}$, der sechsten Dignität von a $\sqrt[6]{a}$ u. s. w.

§. 42.

Irrational-Größen sind solche, welche keine Quadrate sind, und aus welchen also die Quadratwurzel nicht gezogen werden kann. Z. Ex. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$.

§. 43.

Die Irrational-Größen haben entweder einerley Benennung oder nicht. Ist letzteres,

so müssen die Irrational-Größen von verschiedener Benennung zu einerley Benennung gebracht werden. Dieses geschieht, wenn man die Exponenten unter einerley Benennung bringt, und die dadurch gefundenen Brüche in die Stelle der Exponenten schreibt. Z. Ex. Es seyen $x^{n:m}$ und $y^{r:s}$ die gegebenen Irrational-Größen; so ist $x^{n:m} + y^{r:s} = x^{ns:ms} + y^{mr:ms} = \sqrt[ms]{x^{ns}} + \sqrt[ms]{y^{mr}}$.

§. 44.

Wenn zwey, drey, oder auch mehrere Irrational-Formeln zusammen addirt werden sollen, so setze man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammen. Z. E. Zu $\sqrt{a}$ soll $\sqrt{a}$ addirt werden, so ist die Summe $\sqrt{a} + \sqrt{a}$ oder abgekürzt $2\sqrt{a}$.

§. 45.

Bey der Subtraction der Irrational-Größen ist die Berechnung gar nicht schwer, indem man nur die Zeichen der untern Größe verkehrt lesen darf. Z. Ex.

$$\begin{array}{r} 4 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{6} \\ 1 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{5} + 6\sqrt{6} \\ \hline 3 - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{6} \end{array}$$

§. 46.

Die Multiplication einer Irrational-Größe $\sqrt[m]{a^n}$ mit einer andern $\sqrt[m]{b^r}$ von einerley Art geschieht, wenn man

1) die Größe unter dem Wurzelzeichen, (a^n und b^r) durch einander multiplicirt, und

2) das Product vor das Wurzelzeichen mit seinen Exponenten setzt, so ist

3) das Product $\sqrt[m]{a^n b^r}$.

§. 47.

Soll eine Irrational-Größe $\sqrt[m]{a}$ durch eine andere $\sqrt[m]{b}$ dividirt werden, so darf man solche nur als einen Bruch ansetzen. Z. Ex.

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Fünfter Abschnitt.
Von den Proportionen und Progreßionen.

§. 48.

Sind vier Größen so beschaffen, daß zwischen der ersten und zweyten einerley Unterschied, wie zwischen der dritten und vierten Größe, so machen diese vier Größen eine **arithmetische Proportion** aus.

§. 49.

Eine **stäte (continua) Proportion** ist eine solche, in welcher das zweyte Glied zweymal vorkommt, so, daß es zugleich das Antecedens der ersten Verhältniß, und das Consequens der zweyten ist. Z. Ex. $a \pm b = b \pm c$.

§. 50.

In einer jeden arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden äußern Glieder, der Summe der beyden mittlern gleich: oder welches einerley ist; die Summe des ersten und vierten Gliedes ist immer eben so groß, als die Summe des zweyten und dritten Gliedes. Z. Ex. Es sey *a* das erste, *b* das zweyte, *c* das dritte und *d* das vierte Glied, so ist die Proportion:

$$a + b = c + d,$$ folglich
$$a + d = b + c.$$

§. 51.

In einer ståten arithmetischen Proportion ist die Summe der beyden åußern Glieder dem zweymal genommenen mittleren Gliede gleich. Z. E. Es seyen *a* und *c* die åußern Glieder, und *b* das mittlere, so ist

$$a + b = b + c,$$ oder
$$a + c = 2b.$$

§. 52.

Es sind in einer arithmetischen Proportion drey Glieder gegeben, wie kann man das vierte Glied finden?

Auflösung.

Es seyen die drey ersten Glieder *a*, *b*, *c* gegeben, man soll daraus das vierte *d* finden, so ist dasselbe $d = b + c - a$, das ist, man addire das zweyte und dritte, und von der Summe ziehe man das erste ab, so giebt der Rest das vierte Glied.

2) Es sey das erste *a*, das zweyte *b* und das vierte Glied *d* gegeben, man soll das dritte *c* finden, so ist dasselbe $c = a + d - b$, das ist, das dritte Glied ist gleich der Summe der beyden åußern Gliede weniger den zweyten Glied.

3) Es

3) Es sey das zweyte Glied *b*, das dritte *c* und das vierte *d* gegeben, wie groß ist das erste *a*? $a = b + c - d$, das ist, die Summe der beyden mittleren Glieder, weniger dem letzten ist das erste Glied.

4) Es sey das Glied *a*, das dritte *c* und das vierte *d* gegeben, so ist das zweyte $b = c - d + a$, das ist, zu dem Unterschied zwischen dem dritten und vierten das erste Glied addirt, giebt das zweyte *b*.

§. 53.

In einer ståten arithmetischen Proportion sind die beyden åußern Glieder gegeben, wie kann man das mittlere finden?

Auflößung.

Man addire das erste und letzte Glied, und die Summe dividire man durch 2, so ist der Quotient das verlangte mittlere Glied. Z. Ex. Es sey das erste Glied *a*, das letzte Glied *c*; so ist nach §. 51. die Summe $a + c = 2b$, folglich $1b$ das mittlere Glied.

§. 54.

Ist in einer ståten arithmetischen Proportion eines von den åußern nebst dem mittlern gegeben, wie findet man das andere åußere?

Auf-

Auflößung.

Es sey a das erste Glied, und b das mittlere; so dupplire man das mittlere, und von dem Product ziehe man das gegebene äußere ab, so giebt der Rest das andere äußere, und so wird c als das andere äußere gesuchte Glied seyn $= c = 2b - a$.

§. 55.

Eine Reihe der Größen, welche immer um gleichviel wächst, oder abnimmt, es mag dieselbe aus soviel Glieder bestehen, als sie immer will, nennt man eine **arithmetische Progreßion.**

§. 56.

Diejenige Größe, um welche die Glieder einer arithmetischen Progreßion größer oder kleiner werden, heißt man die **Differenz** oder **Unterschied.** Wenn also das erste Glied $= a$, und die Differenz $= d$, so wird die arithmetische Progreßion so zu stehen kommen: als:

$$a.\ a \pm d.\ a \pm 2d.\ a \pm 3d.\ a \pm 4d.$$

u. s. w.

Das Zeichen + gilt für die aufsteigende, und das Zeichen — für die niedersteigende Progreßion.

§. 57.

§. 57.

Hieraus ergiebt sich ganz klar und deutlich, daß man ein jegliches Glied einer arithmetischen Progreßion finden könne, ohne daß man nöthig hat, die vorhergehenden Glieder zu wissen, und dieses blos aus dem ersten Gliede a und der Differenz d. Z. Ex. Das fünfte Glied ist nach §. 56. $= a + 4d$; folglich wird das n^{te} Glied seyn $a + (n-1)d$. Aus diesem folgt, daß, wenn das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$ gegeben, man das letzte Gied z finden kann, indem man die Differenz mit der Anzahl der Glieder weniger 1 multiplicirt, und zu dem Product das erste Glied addirt: also ist das letzte Glied $z = a + (n-1)d$.

§. 58.

Ist in einer arithmetischen Progreßion das erste Glied $= a$, das letzte $= z$, und die Anzahl der Glieder $= n$ bekannt, so findet man daraus die Differenz $= d$, wenn man von dem letzten Gliede z das erste a abzieht, und den Rest durch die Anzahl der Glieder weniger $1 = n - 1$ dividirt; folglich ist $d = \frac{z - a}{n - 1}$.

§. 59.

Ist das erste Glied $= a$, das letzte $= z$, und die Differenz $= d$ gegeben, und man soll

daraus

daraus die Anzahl der Glieder $= n$ suchen; so findet man dieselbe, wenn man das erste Glied abzieht; den gefundenen Rest durch die Differenz dividirt, und zu dem Quotienten 1 addirt, folglich ist $n = \frac{z - a}{d} + 1$.

§. 60.

Wenn aber das lezte Glied $= z$ die Differenz $= d$ und die Anzahl der Glieder $= n$ bekannt sind; so wird das erste Glied $= a$ gefunden, wenn man die Anzahl der Glieder weniger $1 = n - 1$ mit der Differenz $= d$ multiplicirt, und von dem Product das lezte Glied $= z$ abzieht, folglich ist $a = z - (n-1)d$.

§. 61.

In einer jeden arithmetischen Progreßion ist die Summe der äußersten Glieder der Summe je zweyer darzwischen liegenden Glieder gleich, wenn solche gleich weit von den äußersten entfernt sind.

Beweis. In der arithmetischen Progreßion §. 56. ist a das erste Glied, und $a + 4d$ das fünfte Glied und die Summe ist $= 2a + 4d$. Nimmt man nun das zweyte Glied $= a + d$, und das vorlezte Glied $= a + 3d$, so ist die Summe ebenfalls $= 2a + 4d$. Besteht die Progreßion aus einer ungeraden Anzahl, so ist

ist die Summe der beyden äußersten Glieder dem doppelten mittlern Gliede gleich. In eben diesem Exempel ist die Summe der beyden äußersten $= 2a + 4d$, und das mittlere oder dritte Glied ist $= a + 2d$. Nimmt man dieses gedoppelt, so ist das Product $= 2a + 4d$; folglich der Summe der beyden äußersten Gliedern gleich: und dieses war zu beweisen.

§. 62.

Wenn man obiger Progreßion ihre Summe finden will, so darf man nur eben diese Progreßion rückwärts darunter schreiben, und Glied vor Glied addiren, wie folgt:

$$\begin{array}{l} a + a + d + a + 2d + a + 3d + a + 4d \\ \underline{a + 4d + a + 3d + a + 2d + a + d + a -} \\ 2a + 4d + 2a + 4d + 2a + 4d + 2a + 4d + 2a + 4d \end{array}$$

so ist diese gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe zweymal so groß, als die Summe der Progreßion. Da nun die Anzahl der Glieder $= n$, so ist die Summe s derselben $= n . 2a + 4d = s$. Weil nun diese Summe zweymal so groß ist, als die Summe der arithmetischen Progreßion, so ist die wahre Summe $\frac{= n . 2a + 4d}{2} = s$. Weil nach §. 57. $a + 4d = z$; so muß folglich $2a + 4d = a + z$ seyn, und hieraus folgt denn ganz natürlich, daß $\frac{n . 2a + 4d}{2} = n \frac{(a + z)}{2} = s$.

ergiebt

ergiebt sich die leichte Regel für die Summation einer jeglichen arithmetischen Progreßion.

Man multiplicire die Summe des ersten und letzten Glieds mit der Anzahl der Glieder, so giebt die Hälfte des Products die Summe der ganzen Progreßion.

Oder

man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder

man multiplicire die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder.

§. 63.

Die Anwendung obiger Formeln durch einige praktische Aufgaben zu erläutern, ist um so nöthiger, weil dadurch der Vortheil, den dieselben leisten, um so deutlicher in die Augen fällt.

Erste Aufgabe.

Wieviel Schuh wird ein Körper in der 60sten Secunde fallen, wenn derselbe in der ersten Minute 16, in der zweyten 45, in der dritten 75 Schuh u. s. w. fällt. Es

Es sey das erste Glied $a = 15$
die Differenz $d = 30$
die Anzahl der Glieder $n = 60$
so ist das letzte Glied $z = a + (n - 1) d$;
folglich 15 (60 — 1) 30 = 1785 Schuh.

Zweyte Aufgabe.

Wie weit wird ein Körper in einer Minute, oder welches einerley ist, in 60 Secunden fallen, wenn derselbe in der ersten Minute 15, in der zweyten 45, in der dritten 75 Schuh u. s. w. fällt? Nach der vorhergehenden Aufgabe ist das erste Glied $a = 15.$, die Differenz $d = 30$, das letzte Glied $z = 1785$, und die Anzahl der Glieder $n = 60$. Da nun die Sum̃e $s = \frac{n(a + z)}{2}$, so ist $\frac{(15 + 1785) 60}{2}$ $= 54000$ Schuh.

Dritte Aufgabe.

Einer kauft ein Pferd mit der Bedingung: für den ersten Hufnagel zahlt er 15 kr. für den zweyten 21 kr. für den dritten 27 kr. und immer 6 kr. mehr für jeden folgenden. In allem sind aber 32 Nägel; wie hoch kömmt das Pferd zu stehen?

Da das erste Glied $a = 15$ kr.
die Differenz $d = 6$ kr.
die Anzahl der Glieder $n = 32$ kr.

so ist nach §. 57. das letzte Glied $z = a + (n - 1) d = 15 + (32 - 1) 6 = 201$. Hieraus ergiebt sich die gesuchte Summe $s = \frac{n(a+z)}{2} = \frac{32 (15 + 201)}{2} = 3456$. Folglich kommt das Pferd 3456 Kreuzer oder fl. 57 36 kr. zu stehen.

Vierte Aufgabe.

Ein Bauersweib verkauft Aepfel auf dem Markt an verschiedene Käufer. Dem ersten giebt sie 2, dem andern 5, dem dritten 8 u. s. w. und immer dem folgenden 3 mehr als den vorhergehenden, bis endlich der letzte 23 Aepfel bekommt. Nun fragt es sich, wie viel sind Käufer gewesen, und wie viel Aepfel sie verkauft habe? Vermöge dieser Aufgabe soll also die Anzahl der Glieder, und die Summe der Progreßion gefunden werden.

Da das erste Glied $a = 2$
die Differenz $d = 3$
und das letzte Glied $z = 23$,

so ist nach §. 59 $n = \frac{z - a}{d} + 1 = \frac{23 - 2}{3} + 1 = 8 = n$, oder die Anzahl der Käufer. Die Summe der Progreßion $s = \frac{n(a+z)}{2} = \frac{8 (2 + 23)}{2} = 100 = s$.

Fünfte

Fünfte Aufgabe.

Eine Person begegnet 8 Bettlern, und giebt dem ersten 2 Kreuzer, dem andern etliche Kreuzer mehr, desgleichen den übrigen, so, daß er einem jeden mehr als dem andern gegeben bis auf den letzten, welcher 30 Kreuzer bekommen hat. Nun fragt sich, wieviel der andere mehr als der erste erhalten hat; und wieviel Kreuzer ausgegeben worden sind?

Vermöge dieser Aufgabe soll man den Unterschied nebst der Summe der arithmetischen Progreßion bestimmen.

Nach §. 58. ist die Differenz $d = \frac{z - a}{n - 1}$.

Es sey das erste Glied $a = 2$
das letzte Glied $z = 30$
die Anzahl der Glieder $n = 8$;

so ist $\frac{30 - 2}{8 - 1} = 4$ die Differenz

und die Summe $s = 8 \frac{(2 + 30)}{2} = 128$

oder fl. 2. —8 kr.

Sechste Aufgabe.

Ein Brunn hat 12 Wasserröhren, aus der andern fließen in einer Stunde 2 Eymer Wasser mehr als aus der ersten; aus der dritten mehr als aus der zweyten u. s. w. so,

 daß

daß immerfort die folgende Röhren zwey Eymer Wasser mehr ausgießen, als die vorhergehende: aus allen Röhren aber zusammen, fließen 180 Eymer. Nun fragt es sich, wie viel Wasser aus einer jeden Röhre in einer Stunde fließen könne?

Aus dieser Aufgabe erhellet, daß man aus dem gegebenen Unterschiede der Anzahl der Glieder und der Summe der arithmetischen Progreßion das erste und letzte Glied finden soll.

Es sey der Unterschied $d = 2$
die Anzahl der Glieder $n = 12$
und die Summe $s = 180$.

Weil $s = n \frac{(a+z)}{2}$; so darf man nur

$s = 180$ durch $\frac{n}{2}$; so giebt der Quotient

die Summe von $a+z = 30$ an. Weil die Summe der beyden äußersten Glieder das erste Glied zweymal nebst dem Unterschiede multiplicirt mit der Anzahl der Glieder weniger eins enthält; so multiplicire man die Differenz $d = 2$ durch die Anzahl der Glieder $n = 12$ weniger 1: also $n - 1 = 11$, und das Product 22 ziehe man von der gefundenen Summe $a+z = 30$ ab, so bleibt 8 das erste Glied zweymal genommen übrig. Halbirt man diese 8, so ist der Quotient $4 =$ dem ersten Gliede a. Da nun das erste Glied

$a = 4$,

$a=4$, so läßt sich nach §. 57. das letzte z finden, indem $z=a+(n-1)d$, folglich $z=4(12-1)2=26$.

§. 64.

Das geometrische Verhältniß zwischen zwey gegebenen Größen giebt die Antwort auf die Frage: **um wieviel die eine Größe größer sey als die andere Größe**, an; und wird gefunden, wenn man die eine durch die andere dividirt.

§. 65.

Bey einem geometrischen Verhältniß kommen drey Stücke zu betrachten vor. Erstens: die erste der beyden gegebenen Größen, welche der **Vordersatz** heißt; zweytens: die andere derselben, welcher der **Nachsatz** heißt, und drittens: die **Benennung des Verhältnißes**, welche man durch die Division des Vordersatzes in dem Nachsatz findet.

§. 66.

Sind zwey geometrische Verhältniße einander gleich, so wird die Gleichheit derselben eine **geometrische Proportion** genannt. Man schreibt dergleichen geometrische Proportion $a:b=c:d$, und wird ausgesprochen; wie sich verhält a zu b, so verhält sich auch c zu d.

§. 67.

Eine jede geometrische Proportion hat vier Glieder, welche die Eigenschaft haben müssen, daß, wenn man das erste durch das zweyte dividirt, es eben soviel ist, als ob man das dritte durch das vierte dividirt.

§. 68.

Hieraus folgt diese Haupteigenschaft, daß das Product aus dem ersten und vierten Glied eben so groß ist, als das Product aus dem zweyten und dritten; oder daß das Product der beyden äußern Glieder gleich ist dem Product der beyden mittleren Glieder. Z. Ex. Es sey die geometrische Proportion $a:b=c:d$, so ist $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Multiplicirt man jeden dieser Brüche mit b, so bekommt man $a=\frac{bc}{d}$. Multiplicirt man ferner beyderseits mit d, so bekommt $ad=bc$. Nun ist aber ad das Product der äußern Glieder, und bc das Product der mittleren Glieder, welche beyde Producte folglich einander gleich sind.

§. 69.

Weil in einer geometrischen Proportion das Product der äußern Glieder dem Product der mittleren Glieder gleich ist, so kann man daraus leicht das vierte Glied finden, wenn die drey ersten Glieder gegeben sind.

Z. E.

Z. E. Es seyen die drey ersten Glieder a, b und c bekannt, $a:b=c$, und für das vierte unbekannte Glied setze man d. Da nun $ad = bc$ seyn muß, so dividire man beyderseits durch a, so bekommt man $d = \frac{bc}{a}$; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$, welches herauskommt, wenn man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt, und das herausgekommene Product durch das erste Glied dividirt.

§. 70.

Die Glieder einer jeglichen geometrischen Proportion können auf verschiedene Art versetzt werden, ohne die Proportion dadurch aufzuheben.

Beweis. Die Proportion bleibt, so lange das Product der äußeren Glieder dem Producte der mittleren Glieder gleich bleibt: folglich

$a:b=c:d.$	$ad=bc.$
$a:c=b:d.$	$ad=bc.$
$b:a=d:c.$	$ad=bc.$
$b:d=a:c.$	$ad=bc.$
$c:a=d:b.$	$ad=bc.$
$c:d=a:b.$	$ad=bc.$
$d:b=c:a.$	$ad=bc.$
$a+b:b=c+d:d.$	$ad=bc.$
$a:a+b=c:c+d.$	$ad=bc.$
$a-b:b=c-d:d.$	$ad=bc.$
$a:a-a=c:c-d.$	$ad=bc.$

Denn es ist immer das Product der äußern dem Product der mittlern gleich.

§. 71.

Wenn man die Glieder einer geometrischen Proportion der Ordnung nach durch die Glieder einer andern Proportion multiplicirt, so bleibt immer unter den Producten eine Proportion.

Beweis. Es seyen die zwey Proportionen:

$$a:aq=b:bq$$
$$c:cp=d:dp$$

Multiplicirt man die Glieder der ersten Proportion mit den Gliedern der andern Proportion, so entsteht:

$$ac:acpq=db:dbpq$$

welches ebenfalls eine geometrische Proportion ist, weil beyderseits der nemliche Quotient, nemlich pq ist.

Der Beweis für die Division ist der nemliche:

$$\text{Es sey} \begin{cases} ac:acpq=bd:bdpq \\ c:\ cp\ =\ d:dp \end{cases}$$

Dividirt man die Glieder der ersten Proportion durch die Glieder der zweyten Proportion, so entsteht: $a:aq=b:bq$.

Hieraus folgt, daß gleiche Potenzen, wie auch gleiche Wurzeln solcher Größen, die eine Proportion ausmachen, gleichfalls proportional sind.

§. 72.

Wenn mehrere gleiche Verhältniße sind, so wird die Summe aller Vordersätze zur Summe aller Nachsätze sich verhalten, wie was immer für ein Vordersatz zu seinem Nachsatz.

Beweis. Die gleichen Verhältniße sind: $a:aq$, und $b:bq$; imgleichen $c:cq$ und $d:dq$.

Die Summe alle Vordersätze ist $a+b+c+d$,

die Summe aller Nachsätze $\overline{a+b+c+d}\times q$.

Nun aber verhalten sich diese zwey Summen gegen einander, wie $a:aq$, weil beyderseits der nemliche Quotient q statt findet.

§. 73.

Es sind drey Glieder einer geometrischen Proportion gegeben, wie findet man das vierte Glied?

Auflösung.

Geht eines der äußern Glieder ab, so multiplicire man die beyden mittlere, das Product dividire man durch das gegebene äußere, so giebt der Quotient das gesuchte äußere Glied.

Ist aber eines von den mittleren Gliedern zu suchen, so multiplicire man die beyden äußern Glieder, dividire das herausgekommene

Product durch das gegebene mittlere Glied, so ist der Quotient das gesuchte mittlere Glied.

Zum Exempel.

Es sey a das erste Glied,
b das zweyte, und
c das dritte Glied;
so ist im ersten Fall die Proportion

$$a : b = c : \frac{bc}{a}$$

Es sey a das erste Glied,
c das dritte, und
d das vierte Glied;
so ist im zweyten Fall die Proportion

$$a : \frac{ad}{c} = c : d$$

§. 74.

Es sind zwey Glieder einer stäten geometrischen Proportion gegeben, wie findet man das dritte?

Auflösung.

1) Soll das mittlere Glied gesucht werden, so multiplicire man die beyden äußern Glieder, und aus dem Produkt ziehe man die Quadratwurzel, so ist alsdenn solche das verlangte Glied.

2) Soll aber eines von den äußern Gliedern gesucht werden, so verwandele man das mittlere Glied in ein Quadrat; und dividire alsdenn solches durch das gegebene äußere Glied, so giebt der Quotient das verlangte äußere Glied.

Zum Exempel.

Es sey im ersten Fall a das erste, und
c das dritte Glied;

so ist die Proportion $a:\sqrt{ac}=\sqrt{ac}:c$.

Es sey im zweyten Fall a das erste, und
b das mittlere Glied

so ist die Proportion $a:b=b:\frac{b^2}{a}$.

§. 75.

Eine Reihe Größen, welche immer um gleich viel wächst oder abnimmt, heißt eine **geometrische Progreßion**. Diejenige Größe, welche angiebt, um wie vielmal ein jedes Glied größer ist als das vorhergehende Glied, wird der **Nenner** genennt.

Eine jede geometrische Progreßion kann auf folgende Art ausgedrückt werden:

$a.\ aq.\ aq^2.\ aq^3\ aq^4.\ aq^5$ u. s. w.

§. 76.

Ein jedes Glied einer geometrischen Progreßion ist gleich dem Product aus dem ersten Gliede, und aus den Exponenten zu jener Potenz erhoben, welche die Zahl der vorhergehenden Glieder anzeigt.

Beweis. Der Exponent fängt an ein Factor zu seyn im zweyten Gliede, und er steigt in jedem Gliede um einen Grad.

Hieraus folgt: die Potenzen von einer jeglichen Größe machen eine geometrische Progreßion aus. Denn setzt man $a = 1$; so erhält man in der allgemeinen Formel:

$$1 . q . q^2 . q^3 . q^4 . q^5 . \text{ u. s. w.}$$

Ganz anders aber verhält sich die Sache bey den Wurzeln einer Größe.

§. 77.

In allen geometrischen Progreßionen ist das Product der zwey äußersten Glieder gleich dem Product aus was immer für zweyen andern Gliedern, die von dem äußersten gleich weit abstehen.

Der Beweis hievon ist klar, wenn man nur die allgemeine Formel $a . aq . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5 \; aq^6 .$ u. s. w. betrachtet; denn das Pro-

duct der äußern Glieder $a \times aq^6 = a^2 q^6$ das Product des zweyten und vorletzten Gliedes ist $aq \times aq^5 = a^2 q^6$ u. s. w.

§. 78.

In einer jeden geometrischen Progreßion verhält sich das erste Glied zum dritten, wie das Quadrat des ersten zum Quadrat des zweyten: das erste zum vierten, wie der Cubus des ersten zum Cubus des zweyten u. s. w.

Der Beweis liegt in der allgemeinen Formel. Den $a : aq^2 = a^2 : a^2 q^2$. Eben so auch $a : aq^3 = a^3 q^3$.

§. 79.

In einer jeden geometrischen Progreßion verhält sich die Summe aller Glieder, das letzte ausgenommen, zur Summe aller Glieder, das erste ausgenommen, wie das erste zum zweyten.

Beweis. Die Summe aller Vordersätze verhält sich zu der Summe aller Nachsätze, wie ein jeder Vordersatz zu seinem Nachsatz. §. 72. Es sind aber in einer geometrischen Proportion alle Glieder ein Vordersatz, das letzte ausgenommen, folglich sind auch alle ein Nachsatz, das erste ausgenommen. Mithin verhält sich die Summe aller Glieder, das

letzte

letzte ausgenommen, zur Summe aller Glieder, das erste ausgenommen, wie das erste Glied zum zweyten Gliede.

Anmerkung.

Es ließen sich, wie bey der arithmetischen Progreßion, sehr viele Formeln zu Auflösung der Aufgaben einer geometrischen Progreßion berechnen. Da aber die Berechnung eines Theils sehr schwer ist, und andern Theils nicht so häufig vorkommt, so ist es genug, wenn man folgende aus den vorgenannten Grundsätzen fließende und öfters vorkommende Aufgaben sich merkt.

§. 80.

Das erste Glied, der Quotient und die Anzahl der Glieder einer geometrischen Progreßion sind gegeben, wie findet man das vierte?

Auflösung.

Es sey das erste Glied $= a$
das letzte Glied $= z$
der Quotient $= q$
die Anzahl der Glieder $= n$;
so folgt aus den vorhergehenden Grundsätzen folgende Formel:

$$z = aq^{n-1}.$$

das

das heißt, um das letzte Glied zu bekommen, erhebe man den Quotienten zu jener Potenz, welche die Anzahl der Glieder weniger 1 anzeigt, und mit dieser Potenz multiplicire man das erste Glied. Will man aber, wenn *n* eine sehr große Zahl ist, und die Erhebung zu einer sehr hohen Potenz sehr beschwerlich ist, die Rechnung abkürzen, so merke man sich folgendes: Soll eine Größe zu einer Potenz erhoben werden, so theile man den Exponenten dieser Potenz in zwey, drey und mehrere Theile, und erhebe die gegebene Größe zu den durch diese Theile angezeigten Potenzen, und multiplicire diese durch einander, so ist das Product die verlangte Potenz.

Zum Exempel.

Soll eine Größe zur siebenten Potenz erhoben werden: so erhebe man sie zur dritten und vierten Potenz, und multiplicire solche durch einander, so ist das Product die siebente Potenz.

Exempel.

Gesetzt, ein Körnlein Getreid trage in einem Jahre nur fünf Körnlein: säet man diese fünfe wieder aus, so bringt ein jedes derselben wieder fünf Körnlein, und so fort bis in das vierzigste Jahr. Wieviel Körnlein werden im vierzigsten Jahre wachsen?

Auf-

Auflösung.

Es sey $a=5$, $q=5$ und $n=40$; so ist $n-1=39$. Um also den Werth von z zu finden, muß man zu Folge der Formel $z=aq^{n-1}$ die Zahl 5 zu der neun und dreyßigsten Potenz erheben, und alsdenn durch das erste Glied multipliciren. Man nehme Anfangs 5 bis zur dritten Potenz; so ist dieselbe $=125$. Diese durch sich selbst multiplicirt giebt die sechste Potenz $=13625$. Diese wieder durch sich selbst multiplicirt, giebt die zwölfte Potenz 244140625. Multiplicirt man diese wieder durch sich selbst, so giebt 59604644775390625 die vier und zwanzigste Potenz. Multiplicirt man diese wieder mit der zwölften Potenz, so bekommt man 14551915228366851806640625 für die sechs und dreyßigste Potenz. Diese wieder mit der dritten multiplicirt, giebt für die neun und dreyßigste Potenz 1818989403 545856475830078125. Endlich diese wieder durch das erste Glied 5 multiplicirt, giebt 9094947017729282379150390625 die verlangte Anzahl der Körner, welche im vierzigsten Jahre wachsen.

§. 81.

Das erste und letzte Glied einer geometrischen Progreßion nebst dem Quotienten sind gegeben, man soll die Summe der ganzen Progreßion suchen.

Auf=

Auflösung.

Man multiplicire das letzte Glied durch den Quotienten, von dem Product ziehe man das erste Glied ab, den Rest dividire man durch den Quotienten weniger 1, so ist der herausgekommene Quotient die Summe der ganzen Progreßion. Es sey die Summe $= s$; so ist also $s = \frac{zaq - a^2}{aq - a} = \frac{zq - a}{q - 1}$

Zum Exempel.

Wieviel Getraidt wird in vierzig Jahren, wenn im ersten Jahre aus einem Körnlein 5 wachsen, diese wieder gesäet werden, und aus jedem wieder fünfe entspringen u. s. w.

Man suche nach dem vorhergehenden §. das letzte Glied, so findet man, daß dasselbe hält, $9094947017729282379150390625 = z$ $a = 5$ und $q = 5$.

Wenn man nun das letzte Glied z mit q, das ist, durch 5 multiplicirt, so entsteht $zq = 45474735088646411895751953125$; und zieht man $a = 5$ davon ab, so entsteht $zq - a = 45474735088646411895751953120$. Wenn man dieses endlich durch $q - 1$ das ist, durch 4 dividirt, so entsteht $\frac{zq - a}{q - 1} = 11368683772161602973937988280$.

Sechster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen vom ersten Grad mit einer unbekannten Größe.

§. 82.

Es sind zween Wege zu der Wahrheit zu gelangen: die Zusammensetzung (Synthesis) und die Auflösung (Analysis). Jene fängt von dem einfachsten an, und schwingt sich nach und nach, und gleichsam stuffenweise zu dem, was man zu wissen verlangt: diese nimmt jenes, was gesucht wird, als schon gefunden an: erforscht alsdenn alle Folgen, die aus dieser Voraussetzung fließen, und zieht endlich aus eben diesen Folgen die gesuchte Wahrheit heraus. Dieser zweyten Art, die Wahrheit zu entdecken, bedient man sich in Auflößung der algebraischen Aufgaben. Es müssen aber in allen Aufgaben einige Dinge bekannt, und wenigst ein Ding unbekannt seyn; denn, wenn alles bekannt wäre, so würde nichts mehr übrig seyn, nach dem man fragen könnte: wenn aber gar nichts bekannt wäre, würde die Frage unmöglich aufzulösen seyn.

Zu Auflösung der algebraischen Aufgaben bedient man sich der Gleichungen. Diese dann, wie sie aufzulösen sind, soll in folgenden §§. erklärt werden.

§. 83.

§. 83.

Eine Gleichung ist eine Vergleichung zweeener algebraischen Ausdrücke, derer einer soviel gilt, als der andere. Sie werden mit einander durch das Zeichen = verbunden. Jene Größen, welche zur Linken dieses Zeichens stehen, machen, alle zusammengenommen, das erste Glied der Gleichung: die, welche zur Rechten dieses Zeichens stehen, machen das zweyte Glied der Gleichung aus: also machen in der Gleichung $3x + 3b = 3c - 5d + 2a$, die zwo ersten Größen $3x + 3b$ das erste: die drey letzten $3c - 5d - 2a$ das zweyte Glied aus.

§. 84.

Jene Gleichung, in welcher nur eine unbekannte Größe ist, heißt eine **bestimmte Gleichung**. Wenn aber mehrere unbekannte Größen darinn vorkommen, nennt man sie eine **unbestimmte Gleichung**. Die Ursache dieser Benennung ist, weil jene nur eine, oder wenigst nur eine bestimmte Anzahl der Auflösungen hat, diese aber unendlich vielerley.

§. 85.

Jede Gleichung ist von jenem Grade, welchen der größte Exponent der unbekannten Größe anzeigt: also ist die Gleichung $3x + a^2 = 2b - x$ vom ersten; die Gleichung $x^2 + ax = c$ vom zweyten Grade.

§. 86.

Eine Gleichung auflösen heißt soviel, als den Werth der unbekannten Größe, die darinn vorkömmt, finden. Dieses erhält man, wenn die Gleichung also geordnet wird, daß die unbekannte Größe ganz allein auf der einen Seite des Zeichens =, auf der andern aber lauter bekannte Größen stehen.

Wie man nun dieses erhalten könne erstens, wenn die Gleichung vom ersten Grade ist, und nur eine unbekannte Größe hat: zweytens, wenn sie vom zweyten Grade ist, aber wieder nur eine unbekannte Größe hat: drittens, wenn mehrere unbekannte Größen darinn begriffen sind; wird in nachfolgenden Paragraphen gezeigt.

§. 87.

Ehe man noch die Regeln zu dieser Auflösung giebt, muß man jene Grundsätze anführen, auf welche sich alle diese Regeln gründen.

I. Wenn man zu gleichen Größen etwas gleiches addirt, so werden die Summen gleich seyn.

II. Wenn man von gleichen Größen etwas gleiches subtrahirt, so sind die Reste gleich.

III. Wenn man gleiche Größen durch gleiche Größen multiplicirt, so entstehen gleiche Producte.

IV. Wenn man gleiche Größen durch gleiche Größen dividirt, so bekömmt man gleiche Quotienten.

V. Wenn gleiche Größen zu den nemlichen Potenzen erhöhet werden, so sind diese Potenzen gleich.

VI. Wenn aus gleichen Größen die nemliche Wurzel ausgezogen wird, so sind diese Wurzeln wieder gleich.

Alle diese Grundsätze kann man in einen zusammenziehen, und sagen: Wenn bey gleichen Größen die nemlichen Bearbeitungen vorgenommen werden, so entstehen wieder gleiche Größen. Hier folgen nun die Regeln.

Erste Regel.

§. 88.

Jeder Theil einer Gleichung kann aus einem Gliede in das andere mit Veränderung des Zeichens übertragen werden, ohne daß hiedurch die Gleichheit beyder Glieder gehoben wird.

Also wenn $x-a=b$, so sagt man, es sey auch $x=a+b$. Denn $x-a+a=b+a$ gemäß dem ersten Grundsatze: weil nun $-a$ und $+a$ einander aufheben, so folgt, daß $x=a+b$. Eben so, wenn $x+a=b$, sagt man, es sey auch $x=b-a$; denn $x+a-a$

 $=b-a$

$=b-a$ gemäß dem zweyten Grundsatze. Also ist auch nach der Abkürzung $x=b-a$.

Durch Hülfe dieser Regel kann man alle Theile einer Gleichung, in welchen die unbekannte Größe enthalten ist, auf eine Seite des Zeichens $=$, und auf die andere, alle, welche gänzlich bekannt sind, setzen.

Exempel.

I.

Es sey $3x+2a-3b=2x+3b-5b$
es wird seyn $3x-2x=3b-5c-2a+3b$
und folglich $x=6b-5c-2a$.

II.

$$2x-3ab-5ac=x-3ab-4ac$$
$$2x-x=-3ab-4ac+3ab+5ac$$
$$x=ac.$$

III.

$$3x-9=2x+6-14$$
$$3x-2x=6-14+9$$
$$x=1.$$

§. 89.

Aus dieser Regel folgt, man könne in jeder Gleichung die Zeichen aller Theile verändern; denn, wenn man alle Theile aus einem Gliede in das andere übersetzen wollte, würden

den ja alle Zeichen verändert werden. Dieses hat öfters seinen Nutzen, wenn nemlich die unbekannte Größe ganz allein auf einer Seite mit dem Zeichen — steht. Also wenn man hat $3x - a = 3x + b$, so bekommt man $3x - 4x = b + a$, oder $-x = b + a$. Wenn man nun alle Zeichen verändert, so entsteht $x = -a - b$.

§. 90.

Zweyte Regel.

Wenn ein Theil einer Gleichung durch was immer für eine Größe multiplicirt ist, so können alle übrigen Theile durch diese Größe dividirt, und dieselbe in jenem Theile, wo sie ein Factor war, weggelassen werden.

Also wenn $ax = b + c$, so sage man, es sey $x = \frac{b+c}{a}$. Denn $\frac{ax}{a} = \frac{b+c}{a}$ gemäß dem vierten Grundsatze, und folglich $z = \frac{b+c}{a}$.

Durch Hülfe dieser Regel kann man die unbekannte Größe von was immer für einen Coeficienten erledigen.

Exempel.

I.

Es sey $3x - 5 = 3 - 2x$
es wird seyn $3x + 2x = 3 + 5$
das ist $5x = 8$
folglich $x = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$.

II.

Es sey $2bcx - ab = 5bc + 2bcd$
es wird seyn $2bcx = 5bc + 2bcd + ab$
das ist $x = \frac{5bc + 2bcd + ab}{2bc}$

III.

Es sey $ax - ab = 3ad$
es wird seyn $ax = 3ad + ab$
folglich $x = \frac{3ad + ab}{a} = 3d + b$.

§. 91.

Wenn die unbekannte Größe mit verschiedenen bekannten Größen multiplicirt, sich in mehreren Theilen befindet, so muß man durch die Summe aller dieser Factoren beyde Glieder der Gleichung dividiren. Im ersten Gliede wird alsdenn die unbekannte Größe allein der Quotient seyn: das andere Glied wird ein Bruch seyn, dessen Nenner die Summe aller dieser Factoren ist. Läßt sich alsdenn der Zäh-

ler

ser durch diesen Nenner genau dividiren, so wird diese Division wirklich vorgenommen: geht aber dieses nicht an, so werden anstatt der Buchstaben ihre Werthe gesetzt, und alsdenn erst in den Zahlen die Division vorgenommen.

Exempel.

I.

Es sey $5acx - 3bc = 2bcx - 3cd$

es wird seyn $5acx - 2bcx = 3bc - 3cd$

folglich $x = \frac{3bc - 3cd}{5ac - 2bc} = \frac{3b - 3d}{5a - 2b}$

II.

Es sey $3ac - 3cx = 5ab - 3bx$

es wird seyn $5bx - 3cx = 5ab - 3ac$

folglich $x = \frac{5ab - 3ac}{5b - 3c} = a$

III.

$$2bx + 8b^2 - 6ab + 9ad = 3dx + 12bd$$
$$2bx - 3dx = 12bd - 8b^2 + 6ab - 9ad$$
$$x = \frac{12bd - 8b^2 + 6ab - 9ad}{2b - 3d} = 3a - 4b$$

Anmerkung.

Wenn in einer Gleichung die unbekannte Größe in mehreren Theilen vorkommt, und

in einem derselben keinen Coeficienten bey sich hat, so ist die Einheit ihr Coeficient, welcher dann in der Division nicht außer Acht gelassen werden muß.

Exempel.

$$x + ax = bc$$

$$x = \frac{bc}{1 + a}$$

§. 92.

Dritte Regel.

Wenn ein Theil einer Gleichung durch was immer für eine Größe dividirt ist, so können die übrigen Theile durch selbe Größe multiplicirt, und alsdenn dieser Divisor, wo er zuvor war, weggelassen werden.

Also wenn $\frac{x}{b} = a$, so sage man, es sey $x = ab$,

Denn $\frac{bx}{b} = ab$ gemäß dem dritten Grundsatze.

Also ist $x = ab$.

Durch Hülfe dieser Regel kann man die unbekannte Größe von allen Divisoren befreyen, und also die Brüche, in denen die unbekannte Größe ist, aufheben. Die Brüche, welche aus lauter bekannten Größen bestehen, ist nicht nöthig aufzuheben: jedoch pflegt man

sie

sie öfters auf gleiche Art wegzuschaffen, damit zuletzt der Werth der unkannten Größe in einem einzigen Bruche erhalten werde; da man doch sonst für diesen Werth mehrere Brüche mit verschiedenen Nennern erhalten würde.

Exempel.

Es sey $\frac{x}{3} - 9 = 15$

es wird seyn $x - 27 = 45$ gemäß der dritten Regel.

$x = 45 + 27 = 72$ gemäß der ersten Regel.

§. 93.

Wenn in einer Gleichung mehrere Brüche vorkommen, kann man auf gleiche Art einen nach dem andern aufheben. Man sehe das folgende Exempel:

Es sey $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 7 - \frac{x}{2}$ Wenn man alles multiplicirt durch 3.

so entsteht
$x + \frac{3x}{5} = 21 - \frac{3x}{2}$ Wenn man alles multiplicirt durch 5.
$5x + 3x = 105 - \frac{15x}{2}$ Wenn man alles multiplicirt durch 2.
$10x + 6x = 210 - 15x$

$10x + 6x + 15x = 210$

$31x = 210$

$x = \frac{210}{31} = 6\frac{24}{31}$

Es

Es sey $\frac{x}{2a} + \frac{3x}{b} = c + \frac{dx}{5f}$

$$x + \frac{6ax}{b} = 2ac + \frac{2adx}{5f}$$

$$bx + 6ax = 2abc + \frac{2abdx}{5f}$$

$$5bfx + 30afx = 10abcf + 2abdx$$

$$5bfx + 30afx - 2abdx = 10abcf$$

$$x = \frac{10abcf}{5bf + 30af - 2abd}$$

§. 94.

Man kann auch alle Brüche auf einmal wegschaffen, wenn man alle Theile der Gleichung durch das Product aller Nenner der Brüche multiplicirt: wobey doch dieses zu beobachten, daß man jeden Zähler der Brüche nur mit dem Producte aller übrigen Nenner multipliciren muß, nicht aber mit dem eigenen; denn wenn man alsdenn den eigenen Nenner wegläßt, so hat man eben darum selben Bruch auch durch seinen Nenner multiplicirt.

Exempel.

I.

$$\frac{2x}{7} - \frac{6}{5} = \frac{3}{4} + \frac{5x}{6}$$

$$2x \times 5 \times 4 \times 6 - 6 \times 7 \times 4 \times 6 = 3 \times 7 \times 5 \times 6 + 5x \times 7 \times 5 \times 4$$

$$240x - 1008 = 630 + 700x$$

$$240x - 700x = 630 + 1008$$

$$-460x = 1638$$

$$460x = -1638$$

$$x = -\frac{1638}{460} = -\frac{819}{230}$$

II.

Es sey $\frac{5ab}{3c} - \frac{5x}{2b} = \frac{3ac}{4} - \frac{ax}{c}$

$$5ab \times 2b \times 4 \times c - 5x \times 3c \times 4 \times c = 3ac \times 3c \times 2b \times c - ax \times 3c \times 2b \times 4$$

$$40ab^2c - 60c^2x = 18ac^3b - 24abcx$$

$$24abcx - 60c^2x = 18ac^3b - 40ab^2c$$

$$x = \frac{18ac^3b - 40ab^2c}{24abc - 60c^2} = \frac{9ac^2b - 20ab^2}{12ab - 30c}$$

§. 95.

Alle Regeln, welche zur Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe gehören, kurz zusammen gezogen. **Erstens:** wenn in der gegebenen Gleichung Brüche vorkommen, so hebt man diese Brüche auf, indem man die ganze Gleichung durch die Nenner der Brüche multiplicirt. **Zweytens:** versetzt man die Theile der

Gleichung mit Veränderung des Zeichen derer, welche versetzt werden, also, daß alle Theile, welche die unbekannte Größe in sich haben, auf der einen Seite, auf der andern alle gänzlich bekannte zu stehen kommen. Drittens; befreye man die unbekannte Größe von ihren Coeficienten oder Factoren, indem man die ganze Gleichung durch die Summe derselben dividirt.

Siebenter Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen vom zweyten Grade mit einer unbekannten Größe.

§. 96.

Die Gleichungen vom zweyten Grade sind solche, in welchen die größte Potenz der unbekannten Größe einen Coeficienten oder einen Divisor bey sich hat, das ist, wenn es durch eine bekannte Größe multiplicirt oder dividirt wird; so muß man erstens diese bekannte Größe wegschaffen, den Coeficienten zwar durch die Division (§. 90.) den Divisor aber durch die Multiplication (§. 92.).

Zweytens. Bringe man alle Theile, welche die unbekannte Größe in sich haben, auf eine, die gänzlich unbekannte auf die andere Seite (§. 88.).

Drit-

Drittens. Wenn alsdenn das Quadrat der unbekannten Größe das Zeichen — vor sich hat, so verändere man alle Zeichen der Gleichung.

Viertens. Wenn das ganze Glied der Gleichung ein vollkommenes Quadrat ist, (welches alsdenn geschieht, wenn das erste Glied aus einem einzigen Theile, nemlich aus x^2 besteht); so ziehe man aus selbem die Quadratwurzel. Eben diese Wurzel ziehe man auch aus dem zweyten Gliede der Gleichung, wenn es sich anders thun läßt. Geht aber diese Ausziehung der Wurzel bey dem zweyten Gliede nicht an; so setze man das Zeichen $\sqrt{}$ vor dasselbe.

Fünftens. Hat aber das erste Glied der Gleichung neben dem x^2 noch einen andern Theil, welcher aus der unbekannten Größe, mit einer bekannten Größe multiplicirt, oder dividirt, besteht; so nehme man die Hälfte dieses Coeficienten oder Factors: erhebe man diese Hälfte zum Quadrat: setze man dieses Quadrat zu jedem Gliede der Gleichung. Solcher Gestalt wird das erste Glied der Gleichung jederzeit ein vollkommenes Quadrat werden, wie leicht erhellet aus jenem Lehrsatze: das Quadrat einer zweygliedichten Größe begreift in sich das Quadrat des ersten Theils, das Product des zweyten Theils, und das doppelte Product des ersten durch den zweyten.

Sechs-

Sechstens. Wenn nun das erste Glied zu einem vollkommenen Quadrate geworden, so ziehe man aus beyden Gliedern der Gleichung die Quadratwurzel, oder wenn dieses bey dem zweyten Gliede sich nicht thun läßt, so setze man das Zeichen $\sqrt{}$ davor. Die Quadratwurzel des ersten Glied ist allezeit x und der halbe Coeficient, mit welchem das x in der Gleichung multiplicirt ist, und zwar mit eben seinem Zeichen.

Siebentens. Brauche man nochmals die Versetzung; indem man den in der Ausziehung der Wurzel erhaltenen bekannten Theil auf die andere Seite setzt, mit Veränderung seines Zeichen.

§. 97.

Hiebey ist noch zu merken, daß man in dem zweyten Gliede vor das Wurzelzeichen + und — setzen, und auch die Wurzel selbst, wenn man sie ausgezogen hat, mit beyden Zeichen nehmen muß: daß also in jeder Gleichung vom zweyten Grade die unbekannte Größe zweyerley Werthe hat.

Die Hälfte des Coeficienten von x kann man leicht bekommen, wenn man diesen Coeficienten, oder wenn es mehrere sind, die Summe der Coeficienten durch 2 dividirt, oder wenn diese Division nicht ohne Rest angeht, 2 als den Denominator darunter schreibe.

Alles dieses kann man in folgenden Exempeln sehen.

Man soll die Gleichung $2x^2 = 4x + 16$ auflösen. Weil x^2 mit 2 multiplicirt ist, so dividire man die ganze Gleichung durch 2, und schaffe also diesen Coeficienten weg. Man bekommt $x^2 = 2x = + 8$; setze man alle Theile, so ein x haben, auf die erste Seite: hieraus entsteht $x^2 - 2x = 8$: der Coeficient von x ist -2: dessen Hälfte ist -1. Dessen Quadrat ist $+1$: setze man dieses zu beyden Gliedern: so bekommt man $x^2 2x + 1 = 8 + 1 = 9$. Ziehe man aus dem ersten Gliede die Quadratwurzel. Diese Wurzel zu finden braucht es gar kein Rechnen: sie besteht nemlich aus zweyen Gliedern: das erste ist x, das zweyte die Hälfte des Coeficienten -2, nemlich -1: die ganze Wurzel ist also $x - 1$. Ziehe man eben die Wurzel aus dem andern Gliede der Gleichung, nemlich aus 9, nehme man sie aber mit beyden Zeichen + und −; sie ist ± 3. Man hat also nunmehr $x - 1 = \pm 3$. Setze man den bekannten Theil -1 auf die andere Seite: hieraus entsteht $x = 1 \pm 3$. Der Werth der unbekannten Größe ist also $x = 1 + 3$, das ist 4, oder auch $1 - 3$, das ist -2. Man sehe hier die ganze Bearbeitung.

$$2x^2 = 4x + 16$$
$$x^2 = 2x + 8$$
$$x^2 - 2x = 8$$
$$x^2 - 2x + 1 = 8 + 1 = 9$$
$$x - 1 = \pm 3$$
$$x = 1 \pm 3 = 4 \text{ oder auch } -2.$$

Es sey die Gleichung $\frac{3x^2}{5} - 18 = 2x$. Man schaffe den Divisor 5 weg, indem man die ganze Gleichung dadurch multiplicirt. Es entsteht $3x^2 - 90 = 10x$. Schaffe man den Coeficienten 3 weg, indem man die ganze Gleichung dadurch dividirt. Es entsteht $x^2 - 30 = \frac{10x}{3}$. Bringe man alle x auf die erste, das gänzlich bekannte Glied auf die andere Seite. Es entsteht $x^2 - \frac{10x}{3} = 30$: der Coeficient von x ist $-\frac{10}{3}$: dessen Hälfte erhebe man zum Quadrate: es ist $\frac{25}{9}$: dieses Quadrat setze man zu beyden Gliedern: hieraus entsteht $x^2 - \frac{10x}{3} + \frac{25}{9} = 30 + \frac{25}{9}$: ziehe man die Quadratwurzel aus dem ersten Gliede: sie muß bestehen aus x und dem halben Coeficienten, den x in der Gleichung hatte: sie ist also $x - \frac{5}{3}$. Vor das zweyte Glied der Gleichung setze man das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ mit

+ und

+ und —. Hieraus entsteht $x - \frac{5}{3} = \pm \sqrt{30 + \frac{25}{9}}$: setze man den bekannten Theil $-\frac{5}{3}$ auf die andere Seite mit Veränderung seines Zeichens. Hieraus entsteht $x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{30 + \frac{25}{9}}$. Um nun die Wurzel aus jener Zahl, die unter dem Wurzelzeichen steht, wenigst beynahe ausziehen zu können, so bringe man alles unter einen Bruch: hieraus entsteht $x = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{295}{9}}$. Nun ziehe man die Quadratwurzel, besonders aus dem Numerator und wieder besonders aus dem Denominator, und schreibe man sie unter einander in Gestalt eines Bruchs. Die Wurzel des Numerators ist, wenn man sie in Decimalen sucht, beynahe 17. 176. Die Wurzel des Denominators ist genau 3. Die Gleichung wird nunmehr also stehen $x = \frac{5}{3} \pm \frac{17.176}{3}$. Wenn man nun diese beyden Brüche in Decimalbrüche verwandelt, so bekommt man anstatt des ersten Bruchs $\frac{5}{3}$ diesen 16666, und anstatt des zweyten diesen 5.7253: die vorige Gleichung wird also in diese verwandelt $x = 1,6666 \pm 5.7253$. Wenn man endlich den zweyten Decimalbruch mit dem Zeichen + nimmt, und also zum ersten addirt, so entsteht $x = +7.3919$. Wenn man aber den zweyten Bruch mit dem Zeichen — nimmt, und also den ersten kleinern davon abzieht, so entsteht $x = -4.0587$: die zween Werthe von x in dieser Gleichung sind also

 + 7.3919,

$+7.3919$, und -4.0587. Man sehe hier die ganze Ordnung der Berechnung.

$$\frac{3x^2}{5} - 18 = 2x$$

$$3x^2 - 90 = 10x$$

$$x^2 - 30 - \frac{10x}{3}$$

$$x^2 - \frac{10x}{3} = 30$$

$$x^2 - \frac{10x}{3} + \tfrac{25}{9} = 30 + \tfrac{25}{9}$$

$$x - \tfrac{5}{3} = \pm\sqrt{30 + \tfrac{25}{9}}$$

$$x = \tfrac{5}{3} \pm \sqrt{30 + \tfrac{25}{9}}$$

$$x = \tfrac{5}{3} \pm \sqrt{\tfrac{295}{9}}$$

$$x = \tfrac{5}{3} \pm \frac{17.176}{3}$$

$$x = 1{,}6666 \pm 5{,}7253$$

$$x = 7.3919 \text{ oder auch} -4.0587.$$

Es sey die Gleichung $x^2 - 12 = -5x$. Nach der Versetzung hat man $x^2 + 5x = 12$. Der halbe Coeficient von x ist $\frac{5}{2}$: dessen Quadrat ist $\frac{25}{4}$: wenn man dieses zu beyden Gliedern addirt, so entsteht $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 12 + \frac{25}{4}$. Wenn man aus dem ersten Gliede die Wurzel zieht, vor das zweyte aber das Wurzelzeichen setzt, so bekommt man $x + \frac{5}{2}$ $= \pm$

$= \pm \sqrt{12 + \frac{25}{4}}$. Wenn man, was unter dem Wurzelzeichen steht, unter einen Bruch bringt, so hat man $x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{73}{4}}$. Wenn man den bekannten Theil $\frac{5}{2}$ versetzt, so entsteht $x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{73}{4}}$. Wenn man aus dem Zähler und Nenner die Quadratwurzel zieht, so bekommt man $x = -\frac{5}{2} + \frac{8,544}{2}$. Wenn man beyde Brüche in Decimalbrüche verändert, so wird $x = -2,5 \pm 4,272$. Wenn man endlich den zweyten Bruch mit dem Zeichen + nimmt, so entsteht $x = 1,772$. Nimmt man ihn aber mit dem Zeichen —, so wird $x = 6,772$. Die Werthe von x in dieser Gleichung sind also 1,772 und — 6,772.

Es sey die Gleichung $x^2 - 6x = -10$. Der halbe Coeficient ist -3, dessen Quadrat ist $+9$: dieses beyderseits addirt gibt $x^2 - 6x + 9 = -10 + 9 = -1$. Wenn man aus dem ersten Theile die Wurzel zieht, und dem zweyten das Wurzelzeichen vorsetzt, so bekommt man $x - 3 = \pm \sqrt{-1}$, und nach der Versetzung $x = 3 \pm \sqrt{-1}$. Weil nun die unter dem Wurzelzeichen stehende Größe negativ ist, so kann unmöglich eine Quadratwurzel daraus gezogen werden. Die Werthe von x sind also in dieser Gleichung beyde unmöglich. Man sehe hier die Berechnung.

$$x^2 - 6x = -10$$
$$x^2 - 6x + 9 = -10 + 9 = -1$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{-1}$$
$$x = 3 \pm \sqrt{-1}.$$

Es sey die Gleichung $4a^2 - 2x^2 + 2ax = 18ab - 18b^2$: durch die Versetzung entsteht $-2x^2 + 2ax = 18ab - 18b^2 - 4a^2$: und nach Veränderung aller Zeichen $2x^2 - ax = -18ab + 18b^2 + 4a^2$. Nach Wegschaffung des Coeficient 2, $x^2 - ax = -9ab + 9b^2 + 2a^2$. Wenn man den halben Coeficienten von x, nemlich $-\frac{a}{2}$ zum Quadrate erhebt, und dieses beyderseits addirt, so entsteht $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = -9ab + 9b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}$. Wenn man aus dem ersten Gliede die Quadratwurzel auszieht, vor das zweyte das Wurzelzeichen setzt, so entsteht $x - \frac{a}{2} = \pm\sqrt{-9ab + 9b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}}$. Wenn man das bekannte Glied $-\frac{a}{2}$ versetzt, so entsteht $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-9ab + 9b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}}$. Wenn man alles, was unter dem Wurzelzeichen steht, unter einen Bruch bringt, so hat man $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{-36ab + 36b^2 + 9a^2}{4}}$.

Läßt

Läßt sich die Quadratwurzel aus dem Numerator und Denominator genau ausziehen: so ziehe man sie also aus: man bekommt $\frac{3a-6b}{2}$ oder auch $\frac{-3a+6b}{2}$: wenn man die erste aus diesen zwoen Wurzeln nimmt, so entsteht $x=\frac{a}{2}+\frac{3a-6b}{2}$ oder $\frac{4a-6b}{2}$, das ist, $2a-3b$. Nimmt man aber die letzte aus diesen zwoen Wurzeln, so hat man $x=\frac{a}{2}-\frac{3a+6b}{2}$ oder $-\frac{2a+6b}{2}$ oder $-a+3b$. Diese zween Werthe von x in dieser Gleichung sind also $2a+3b$ und $-a+3b$. Man sehe hier die Ordnung der Berechnung.

$$4a^2-2x^2+2ax=+18ab-18b^2$$
$$-2x^2+2ax=18ab-18b^2-4a^2$$
$$2x^2-2ax=-18ab+18b^2+4a^2$$
$$x^2-ax=-9ab+9b^2+2a^2$$
$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}=-9ab+9b^2+2a^2+\frac{a^2}{4}$$
$$x-\frac{a}{2}=\pm\sqrt{-9ab+9b^2+2a^2+\frac{a^2}{4}}$$

$x=$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-9ab + 6b^2 + 2a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{-36ab + 36b^2 + 9a^2}{4}}$$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{3a - 6b}{2}$$

$$x = \frac{a}{2} + \frac{3a - 6b}{2} = \frac{4a - 6b}{2} = 2a - 3b$$

$$x = \frac{a}{2} - \frac{3a + 6b}{2} = \frac{-2a + 6b}{2} = a + 3b$$

Anmerkung.

Man sieht hier, daß, wenn man die gefundene Wurzel $3a - 6b$ negativ, das ist, im verkehrten Verstande nehmen wollte, man alle Zeichen derselben verändern, und also anstatt $3a - 6b$ schreiben müßte, $-3a + 6b$. Welches man für allezeit sich wohl merken muß.

I.	II.
$x^2 = a$	$x^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$x = \pm\sqrt{a}$	$x = \pm(a + b)$
	$x = a + b$, oder auch $-a - b$

III.

$x^2 = 4a^2 - 8ab + 4b^2$

$x = \pm(2a - 2b)$

$x = 2a - 2b$, oder auch $-2a + 2b$.

IV.

IV.

$$x^2 = 2c^2x + 2c^2a$$
$$x^2 - 2c^2x + 2c^2a$$
$$x^2 - 2c^2x + c^4 = 2c^2a + c^4$$
$$x - c^2 = \pm\sqrt{2c^2a + c^4}$$
$$x = c^2 \pm \sqrt{2c^2a + c^4}$$

V.

$$x^2 = -5 + 6x$$
$$x^2 - 6x = -5$$
$$x^2 - 6x + 9 = -5 + 9 = 4$$
$$x - 3 = +2$$
$x = 3 \pm 2 = 5$, oder auch 1.

Achter Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

§. 98.

Es ist oben §. 84. gesagt worden, in einer unbestimmten Gleichung habe jede unbekannte Größe unendlich vielerley Werthe. Allein, wenn man so viele verschiedene, von einander unabhängige Gleichungen hat, als viele unbekannte Größen sind, kann man zu einer solchen Gleichung gelangen, welche nur noch eine unbekannte Größe in sich hat, deren Werth hiemit bestimmt seyn wird. Dieses kann auf dreyerley Arten

geschehen: 1) durch die Substitution: 2) durch die Vergleichung der Werthe, und 3) durch die Addition oder Subtraction.

§. 99.

Erste Art. Durch die Substitution.

In einer aus den Anfangs gegebenen Gleichungen sucht man den Werth von was immer für einer unbekannten Größe. Setze man diesen in den übrigen Gleichungen anstatt eben dieser unbekannten Größe. Hieraus entstehen neue Gleichungen, in denen selbe unbekannte Größe nicht mehr anzutreffen ist. In einer aus diesen suche man den Werth einer andern unbekannten Größe: diesen setze man abermal in den übrigen anstatt dieser unbekannten Größe. Hieraus entstehen wieder neue Gleichundgen, in denen schon zwo unbekannte Größen abgehen. Setze man dieses so lange fort, bis man zu einer einzigen Gleichung gelangt, welche nur noch eine unbekannte Größe in sich hat. Wenn man nun den Werth dieser unbekannten Größe in dieser letzten Gleichung sucht, so wird man ihn in lauter bekannten Größen finden: und wenn man diesen gänzlich bestimmten Werth dieser unbekannten Größe in einer aus den vorhergehenden Gleichungen anstatt derselben setzt; so kann man den Werth einer andern unbe-

kannten

kannten Größe ebenfalls gänzlich bestimmen: und wenn man ferner die Werthe dieser zwo unbekannten Größen wieder in einer vorhergehenden Gleichung anstatt derselben setzt; so findet man den Werth der dritten, und also ferner, bis man endlich die Werthe aller unbekannten Größen gänzlich bestimme hat.

Exempel.

Es seyn diese drey Gleichungen gegeben.

$$x + y = a$$
$$y + z = b$$
$$x + z = c.$$

Wenn man in der ersten aus diesen gegebenen Gleichungen den Werth von x sucht, so findet man $x = a - y$. Wenn man nun diesen Werth von x in der dritten aus den gegebenen Gleichungen anstatt x setzt, so entsteht $a - y + z = c$. Die zweyte aus den Anfangs gegebenen Gleichungen bleibt unverändert, weil die unbekannte Größe x nicht darinn vorkömmt. Die zwo neuen Gleichungen, welche wir die zweyten nennen, sind also diese:

$$y + z = b$$
$$a - y + z = c.$$

Wenn man in der ersten aus diesen zwoen Gleichungen den Werth von y sucht, so findet man $y = b - z$. Setzt man diesen Werth von y in der andern aus den zweyten Gleichungen anstatt des y, so entsteht $a - b + z + z = c$.

In

In dieser Gleichung nun ist keine andere unbekannte Größe als z. Man kann also den Werth von z gänzlich bestimmen; denn, wenn man beyde z zusammensetzt, so entsteht $2z+a-b=c$: und wenn man $+a-b$ versetzt, so bekommt man $2z=c-a+b$. Wenn man endlich die ganze Gleichung durch 2 dividirt, so hat man $z=\frac{c-a+b}{2}$. Setzt man nun diesen gänzlich bestimmten Werth von z in der vorhergehenden Gleichung $y=b-z$. Es entsteht $y=b\frac{-c+a-b}{2}$: und wenn man das ganze zweyte Glied unter einen Bruch bringt, so ensteht $y=\frac{2b-c+a-b}{2}$: wenn man endlich die b zusammensetzt, so hat man $y=\frac{b-c+a}{2}$. Setzt man den also gefundenen Werth von y in der vorhergehenden Gleichung $x=a-y$, so bekommt man $x=a\frac{-b+c-a}{2}$ wenn man das zweyte Glied unter einen Bruch bringt, so entsteht $x=\frac{2a-b+c-a}{2}$: setzt man die a zusammen, so bekommt man $x=\frac{a-b+c}{2}$. Die Werthe aller drey unbekannten Größen sind hiemit diese:

$$x=\frac{a-b+c}{2}; y=\frac{b-c+a}{2} z=\frac{c-a+b}{2}$$

Man sehe hier die ganze Bearbeitung der Ordnung nach angesetzt.

Erste Gleichungen.

	$x+y=a$ $y+z=b$ $x+z=a$	$x=a-y$ der Werth von x in der ersten Gleichung.
	hieraus entstehen	
diese zweyte Gleichungen.	$y+z=b$ $a-y+z=c$	$y=b-z$ der Werth von y in der ersten aus den zweyten Gleichungen.
	hieraus entsteht	
diese dritte Gleichung:	$a-b+z+z=c$	
folglich ist	$2z=c-a+b$	$z=\frac{c-a+b}{2}$
		$y=b\frac{-c+a-b}{2}=\frac{b-c+a}{2}$
		$x=a\frac{-b+c-a}{2}=\frac{a-b+c}{2}$

Zweytes Exempel.

Erste Gleichungen.

$$3x - 2y = 5$$
$$2y + x = 7$$

$$x = \frac{5 + 2y}{3}$$

Hieraus entsteht diese zweyte Gleichung.

$$2y + \frac{5 + 2y}{3} = 7$$
$$6y + 5 + 2y = 21$$
$$8y = 21 - 5 = 16$$

$$y = \frac{16}{8} = 2$$
$$x = \frac{5 + 4}{3} = 3$$

Drittes Exempel.

Erste Gleichungen.

$$2ax - by = c$$
$$3by + 5x = d$$

$$x = \frac{c + by}{2a}$$

Hieraus entsteht diese zweyte Gleichung.

$$3by + \frac{5c + 5by}{2a} = d$$
$$6aby + 5c + 5by = 2ad$$
$$6bby + 5by = 2ad - 5c$$
$$y = \frac{2ad - 5c}{6ab + 5b}$$

Wenn man nun in der Gleichung $2ax - by = c$ diesen Werth von y anstatt des y setzt, so entsteht

$$2ax - \frac{2abd + 5bc}{6ab + 5b} = c$$

$$12a^2bx + 10abx - 2abd + 5bc = 6abc + 5bc$$

$$12a^2bx + 10abx = 6abc + 5bc - 5bc + 2abd$$

$$x = \frac{6abc + 2abd}{12a^2b + 10ab}$$

$$x = \frac{3c - d}{6a + 5}$$

§. 100.

Zweyte Art.

Durch die Vergleichung der Werthe.

In einer jeden aus den gegebenen Gleichungen sucht man den Werth von einer nemlichen unbekannten Größe, z. Ex. von x. Diese Werthe sind nothwendig einander gleich. Man hat also also neue Gleichungen, in welchen schon eine unbekannte Größe abgeht. In diesen Gleichungen sucht man die Werthe einer andern unbekannten Größe. Diese sind einander wieder gleich. Es entstehen also neue Gleichungen, in welchen schon zwo unbekannte Größen abgehen, u. s. f. bis man eine Gleichung erhält, in welcher nur noch eine unbekannte Größe vorkommt. Wenn man nun den

den Werth dieser unbekannten Größe in dieser letzten Gleichung in lauter bekannten Größen gefunden hat, und denselben aus den vorhergehenden Gleichungen anstatt eben selber unbekannten Größe setzt, so kann man den Werth einer andern unbekannten Größe wieder gänzlich bestimmen. Und, wenn man den Werth dieser zwo unbekannten Größen wieder in einer aus den vorhergehenden Gleichungen setzt, so findet man den Werth der dritten u. s. f. bis man endlich den Werth aller unbekannten Größen gefunden hat.

Exempel.

Es seyn gegeben diese Gleichungen $\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ x + z = c \end{cases}$

Suche man den Werth von x in der ersten und dritten. Er ist

in der ersten $x = a - y$

in der dritten $x = c - z$

hieraus entsteht $a - y = c - z$

weil die zweyte aus den gegebenen Gleichungen kein x in sich hat, so bleibt sie unverändert. Man hat also diese zwo zweyten Gleichungen.

$$a - y = c - z$$
$$y + z = b.$$

Suche man nun in beyden den Werth von y.

Die

Die erste giebt $y=a+z-c$
Die zweyte $y=b-z$
Hieraus entsteht $a+z-c=b-z$.

In dieser ist keine andere unbekannte Größe, als z. Suche man also den Werth von z. Man bekommt:

$$2z=b+c-a$$

und folglich $z=\frac{b+c-a}{2}$

Setze man diesen Werth von z in der Gleichung $y+z=b$ anstatt des z:

Hieraus entsteht $y\frac{+b+c-a}{2}=b$.

Wenn man den Bruch aufhebt, so bekommt man $2y+b+c-a=2b$: und nach der Versetzung $2y=2b-b-c+a$; und endlich $y=\frac{b-c+a}{2}$.

Setze man diesen Werth von y in der Gleichung $x+y=a$ anstatt des y. Man bekommt $x+\frac{b-c+a}{2}=a$. Und wenn man den Bruch aufhebt, so erhält man $2x+b-c+a=2a$. Und durch die Versetzung $2x=2a-a+c-b$. Und endlich $x=\frac{a+c-b}{2}$. Die Werthe der drey un-

bekannten Größen sind also $x = \frac{a - b + c}{2}$ $y = \frac{b - c + a}{2}$ $z = \frac{b + c - a}{2}$. Alle drey sind eben dieselben, die man oben nach der ersten Art gefunden hat.

Zweytes Exempel.

Erste Gleichungen.

Es sey $\left[\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 2y + x = 7 \end{array}\right.$	$x = \frac{5 + 2y}{3}$
Hieraus entsteht	$x = 7 - 2y$
Diese zweyte $\frac{5 + 2y}{3} = 7 - 2y$	
$5 + 2y = 21 = 6y$	$y = \frac{16}{8} = 2$
$8y = 21 - 5 = 16$	
	$x = 7 - 4 = 3$

Drit-

Drittes Exempel.

Erste Gleichungen.

Es sey $\begin{cases} 2ax - by = c \\ 3by + 5x = d \end{cases}$ | $x = \frac{c+by}{2a}$

Hieraus entsteht

Diese zweyte $\frac{c+by}{2a} = \frac{d-3by}{5}$ | $x = \frac{d-3by}{5}$

$5c + 5by = 2ad - 6abyc$

$6aby - 5by = 2ad - 5$

$y = \frac{2ad - 5c}{6ab + 5b}$

Und wenn man diesen Werth von y in der Gleichung $2ax - by$ anstatt des y setzt,

so entsteht $2ax - \frac{2abd + 5bc}{6ab + 5b} = c$

$12a^2bx + 10abx - 2abd + 5bc = 6abc + 5bc$

$12a^2bx + 10abx = 6abc + 5bc - bc - 2abd$

$$x = \frac{6abc + 2abd}{12a^2b + 10ab}$$

$$x = \frac{3c + d}{6a + 5}$$

Viertes Exempel.

Es seyn gegeben diese drey ersten Gleichungen.

$$2x+3y+z=14$$
$$x-z+2y=7$$
$$z-y-2x=-6$$

Wenn man in einer jeden aus diesen dreyen den Werth von x sucht, so findet man

In der ersten $x=\frac{14-3y-z}{2}$

In der zweyten $x=7-2y+z$

In der dritten $x=\frac{6-y+z}{2}$

Vergleicht man den ersten Werth mit dem zweyten, und alsdenn auch mit dem dritten, so entstehen folgende zwey Gleichungen.

$$\frac{14-3y-z}{2}=7-2y+z$$
$$\frac{14-3y-z}{2}=\frac{6-y+z}{2}$$

Suche man in der ersten aus diesen zweyen Gleichungen den Werth von y, so geht es also her:

$$15-3y-z=14-4y+2z$$
$$4y-3y=2z+z+14-14$$
$$y=3z$$

Suche man den Werth von y in der andern aus den zweyten Gleichungen, so findet man

$$14 - 3y - z = 6 - y + z$$
$$-3y + y = 6 - 14 + z + z$$
$$-2y = -8 + 2z$$
$$2y = 8 - 2z$$
$$y = 4 - z$$

Vergleicht man diese zween Werthe von y mit einander, so hat man

$$3z = 4 - z$$
$$4z = 4$$
$$z = 1$$

Setzt man den Werth von z in der Gleichung $y = 3z$, so bekommt $y = 3 \times 1 = 3$.

Setzt man den Werth von y und z in der Glaichung $x = \frac{14 - 3y - z}{2}$, so bekommt man

$$x = \frac{14 - 9 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Die Werthe der unbekannten Größen sind hiemit diese: $x = 2$. $y = 3$. $x = 1$.

§. 101.

Dritte Art.

Durch die Addition und Subtraction.

Wenn in zwoen aus den gegebenen ersten Gleichungen eine nemliche unbekannte Größe

mit dem nemlichen Coeficienten anzutreffen ist, so addirt man diese zwo Gleichungen zusammen (nemlich das erste Glied zum ersten, das zweyte zum zweyten) oder man subtrahirt sie von einander. Addiren muß man sie, wenn die unbekannte Größe in den zwoen Gleichungen verschiedene Zeichen hat: hat sie aber das nemliche Zeichen, so muß man die Subtraction brauchen. Also wird diese unbekannte Größe wegfallen. Auf gleiche Art kann man auch die übrigen unbekannten Größen wegschaffen, bis man endlich nur noch eine hat, deren Werth man also gänzlich bestimmen kann.

Exempel.

$$x+y=a$$
$$y+z=b$$
$$x+z=c$$

Wenn man die dritte Gleichung von der ersten abzieht, so entsteht

$$y-z=a-c$$

man hat aber schon oben $y+z=b$

Wenn man nun die gefundene von dieser letzten abzieht, so bekommt man $2z=b+c-a$ und aus dieser $z=\frac{b+c-a}{2}$ wie oben nach der ersten und zweyten Art.

Wenn man diese von der obigen $y+z=b$ abzieht, so entsteht

$$y=b\frac{-b-c+a}{2}=\frac{b-c+a}{2}$$ wie oben.

Wenn man diese letzte von der ersten $x+y=a$ abzieht, so bekommt man

$$x=a\frac{-b+c-a}{2}=\frac{a-b+c}{2}$$ wie oben.

Zweytes Exempel.

Es sey $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 2y+x=7 \end{cases}$

Addire man die erste zur zweyten. Es entsteht $4x=5+7=12$

$x=\frac{12}{4}=3$ wie oben.

§. 102.

Zuweilen muß man eine kleine Vorbereitung machen, ehe man dieser Art sich bedienen kann. Diese Vorbereitung aber besteht darinn, daß man der unbekannten Größe, die man wegschaffen will, in beyden Gleichungen einen nemlichen Coeficienten gebe, welches man durch die Multiplication leicht erhält. Die allgemeine Regel, hiezu zu gelangen, ist diese. Man multiplicire die ganze erste Gleichung durch den Coeficienten, den die unbekannte Größe, die man wegschaffen will, in der zwey-

ten Gleichung hat: man multiplicire ebenfalls die ganze zweyte Gleichung durch den Coeficienten, den eben diese unbekannte Größe in der ersten Gleichung hat. Jedoch läßt sich die Sache zuweilen etwas leichter verrichten, welches man am besten durch die Uebung erlernen kann.

Exempel.

Es sey $\begin{cases} 2ax - by = c \\ 3by + 5x = d \end{cases}$

Multiplicire man die erste Gleichung durch den Coeficienten von x in der zweyten, nemlich durch 5: die zweyte durch den Coeficienten von x in der ersten, nemlich durch $2a$: es entstehen folgende zwo neue:

$$10ax - 5bz = 5c$$
$$6aby + 10ax = 2ad$$

Subtrahire man die untere von der obern: es entsteht $-5by - 6aby = 5c - 2ad$
oder $5by + 6aby = 2ad - 5c$

$$y = \frac{2ad - 5c}{5b + 6ab}$$ wie oben.

Halte man nun diese letzte Gleichung gegen einer aus den Anfangs gegebenen: etwa gegen der Gleichung $2ax - by = c$

Weil in dieser Gleichung das y den Coeficienten b hat, so multiplicire man die vorhergehende Gleichung durch b. Man

Man bekommt

$$by = \frac{2abd - 5bc}{5b + 6ab} = \frac{2ad - 5c}{5 + 6a}$$

Addire man beyde. Es entsteht

$$2ax = c + \frac{2ad - 5c}{5 + 6a};$$

und aus dieser

$$10ax + 12a^2x = 5c + 6ac + 2ad - 5c$$

$$10ax + 12a^2x = 6ac + 2ad$$

$$x = \frac{6ac + 2ad}{10a + 12a^2} = \frac{2c + d}{5 + 6a}$$ wie oben.

Zweytes Exempel.

Es sey $\begin{cases} 2x + 3y + z = 14 \\ x - z + 2y = 7 \\ zy - 2x = -6 \end{cases}$

Addire man die erste Gleichung zur zweyten, und subtrahire man die dritte von der ersten, so entstehen folgende zwo Gleichungen, in denen das z ausgemustert ist.

$$3x + 5y = 14 + 7 = 21$$
$$4x + 4y = 14 + 6 = 20$$

Multiplicire man die erste aus diesen zwoen neuen Gleichungen durch 4, die andere durch 3, so entstehen diese zwo neuen, in denen das x den nemlichen Coeficienten hat.

$$12x + 20y = 84$$
$$12x + 12y = 60$$

Subtrahire man die untere von der obern. Es entsteht diese neue Gleichung.

$$20y - 22y = 84 - 60$$
$$8y = 24$$
$$y = 3 \text{ wie oben.}$$

Halte man nun diese letzte Gleichung gegen einer aus den vorhergehenden, in der nur die unbekannten Größen x und y vorkommen: etwa gegen der Gleichung

$$3x + 5y = 21.$$

Multiplicire man die Gleichung $y = 3$ durch 5, so entsteht eine Gleichung, in welcher das y eben den Coeficieneen 5 als wie in der vorhergehenden hat, nemlich

$$5y = 15.$$

Subtrahire man diese von der vorhergehenden. Es entsteht $3x = 21 - 15 = 6$

$$x = \frac{6}{3} = 2 \text{ wie oben.}$$

Man kann auf gleiche Art fortfahren, um den Werth von z zu bestimmen. Allein es wird geschwinder geschehen seyn, wenn man in einer aus den Anfangs gegebenen Gleichungen, etwa in der Gleichung $2x + 3y + z = 14$ die schon gefundenen Werthe von y und z an ihrer Statt setzt.

Es entsteht $5+9+z=14$
$z=14-9-4=1$ wie oben.

§. 103.

Man mag sich was immer für einer Art, aus diesen dreyen erklärten, bedienen, so wird doch die Arbeit, da man die Werthe für zwo, und noch vielmehr für drey unbekannten Größen sucht, schon etwas weitläuftig. Eine andere Art, durch welche man die Werthe von zwoen, und auch von dreyen unbekannten Größen ohne allen Umschweif finden und herschreiben kann, ist folgende.

Man bringe was immer für zwo gegebene Gleichungen unter diese Form.

$$ax+by=c$$
$$dx+ey=f$$

Den Werth von y zu finden multiplicire man a, den Coeficienten von x in der ersten Gleichung durch f, das gänzlich bekannte Glied der zweyten Gleichung. Multiplicire man d den Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch c, das gänzlich bekannte Glied der ersten Gleichung. Ziehe man dieses zweyte Product von dem ersten ab, so hat man $af-cd$ den Numerator jenes Bruchs, der dem y gleich ist. Um den Denominator zu finden, multiplicire man a den Coeficienten von x in der ersten Gleichung durch e den Coeficienten von y in der zweyten Gleichung: und den

Coefi=

Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den Coeficienten von y in der ersten Gleichung. Ziehe man das zweyte Product von dem ersten ab, so hat man $ae-bd$ den verlangten Denominator. Es wird also in unsern zwoen Gleichungen seyn

$$y=\frac{af-cd}{ae-bd}.$$

Den Werth von x zu bekommen, multiplicire man b, den Coeficienten von y in der ersten Gleichung durch f, das gänzlich bekannte Glied der zweyten Gleichung: und e, den Coeficienten von y in der zweyten Gleichung durch c, das gänzlich bekannte Glied der ersten Gleichung. Das zweyte Product ziehe man vom ersten ab: der Rest $bf-ce$ ist der Numerator des Bruchs, der dem x gleich ist. Der Denominator ist eben der, den man für y gefunden hat, aber mit Veränderung aller Zeichen. Es ist also in unsern zwoen Gleichungen

$$x=\frac{bf-ce}{bd-ae}.$$

§. 104.

Wenn in den zwoen Gleichungen verschiedene Zeichen vorkommen, so bleibt die ganze Art, den Werth der unbekannten Größen zu finden, vollkommen die nemliche, wenn man nur dieses wohl merkt, daß man in jeder Verrichtung

richtung das erste Product mit jenem Zeichen nehme, welches ihm kraft der Multiplication gebührt: das andere aber, weil es vom ersten abgezogen werden muß, mit verändertem Zeichen.

Erstes Exempel.

Es sey $\left\{\begin{array}{l} 2ax - by = c \\ 5x + 3by = d \end{array}\right.$

$$y = \frac{2ad - 5c}{6ab + 5b} \text{ wie oben.}$$

$$x = \frac{-bd - 3bc}{-6ab - 5b} = \frac{bd + 3bc}{6ab + 5b} = \frac{3c + d}{6a + 5}$$

wie oben.

Zweytes Exempel.

Es sey $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right.$

$$y = \frac{21 - 5}{6 + 2} = \frac{16}{8} = 2 \text{ wie oben.}$$

$$x = \frac{-14 - 10}{-8} = \frac{24}{8} = 3 \text{ wie oben.}$$

Drittes Exempel.

Es sey $\begin{cases} ax - by = c \\ dz - fy = g \end{cases}$

$$y = \frac{ag - cd}{-af + bd}$$

$$x = \frac{-bg + cf}{af - bd}$$

Viertes Exempel.

Es sey $\begin{cases} -ax - by = c \\ dx + ey = -f \end{cases}$

$$y = \frac{af - cd}{-ae + bd}$$

$$x = \frac{bf - ce}{ae - bd}$$

§. 105.

Wenn in einer aus den zwoen Gleichungen eine unbekannte Größe abgeht, so ist die ganze Art der Auflösung noch die nemliche, wenn man nur den Abgang der unbekannten Größe durch ein Zeichen, etwa durch * anzeigt, und alsdenn merkt, daß alle jene Producte, in welche der Coeficient der unbekannten Größe, welche dießmal abgeht, wenn sie zugegen wäre, kommen müßte, gleich o werden und also wegfallen.

Erstes

Erstes Exempel.

Es sey $\begin{cases} ax - by = c \\ dx * = f \end{cases}$

$$y = \frac{af - cd}{bd}$$

$$x = \frac{-bf}{bd} = \frac{bf}{bd} = \frac{f}{d}$$

Zweytes Exempel.

Es sey $\begin{cases} ax + by = -c \\ * - dy = f \end{cases}$

$$y = \frac{af}{-ad} = -\frac{f}{d}$$

$$x = \frac{bf - cd}{ad}$$

§. 106.

Wenn drey unbekannte Größen und drey Gleichungen sind; so bringt man sie unter diese Form:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= m \\ dx + ey + fz &= n \\ gx + hy + kz &= p. \end{aligned}$$

Den Werth von z zu finden, multiplicire man den Coeficienten von x in der ersten Gleichung durch den Coeficienten von y in der zweyten, und durch das gänzlich bekannte

Glied

Glied in der dritten. Multiplicire man ebenfalls den Coeficienten von x in der ersten Gleichung durch den Coeficienten von y in der dritten, und durch das gänzlich bekannte Glied der zweyten; ziehe man das zweyte Product von dem ersten ab. Man bekommt in diesem Exempel $aep - ahn$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den Coeficienten von y in der dritten, und durch das gänzlich bekannte Glied der ersten: multiplicire man eben diesen Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den Coeficienten von y in der ersten, und durch das gänzlich bekannte Glied der dritten: ziehe man das zweyte Product vom ersten ab. Man bekommt in unserm Exempel $ahm - bdp$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der dritten Gleichung durch den Coeficienten von y in der ersten, und durch das gänzlich bekannte Glied der zweyten: multiplicire man eben diesen Coeficienten von x in der dritten Gleichung durch den Coeficienten von y in der zweyten, und durch das gänzlich bekannte Glied der ersten: ziehe man das zweyte Product von dem ersten ab. Man bekommt in unserm Exempel $gbn - gem$.

Die Summe aus allen diesen Producten ist der Numerator eines Bruchs, der dem x gleich ist.

Den

Den Nominator zu finden, multiplicire man den Coeficienten von x in der ersten durch den Coeficienten von y in der zweyten, und durch den Coeficienten von z in der dritten: multiplicire man eben diesen Coeficienten von x in der ersten durch den von y in der dritten, und durch den von z in der zweyten. Ziehe man das zweyte Product vom ersten ab. Man bekommt $aek - ahf$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den von y in der dritten, und durch den von z in der ersten: multiplicire man eben diesen Coeficienten von x in der zweyten Gleichung durch den von y in der ersten, und durch den von z in der dritten: ziehe man das zweyte Product vom ersten ab. Man bekommt $dhc - dbk$.

Multiplicire man den Coeficienten von x in der dritten Gleichung durch den von y in der ersten, und durch den von z in der zweyten: wie auch durch den von y in der zweyten, und durch den von z in der ersten: ziehe man das zweyte Product vom ersten ab. Man bekommt $gbf - gec$.

Die Summe aller dieser Producte ist der Denominator.

Den Werth von y zu finden, verfahre man eben auf die Art: ausgenommen, daß

 man

man den Numerator zu finden, die Coeficienten von y niemal braucht, sondern an derer Statt die Coeficienten von z. Der Denominator ist vollkommen der nemliche, aber mit Veränderung aller Zeichen.

Den Werth von x zu finden, verfahre man wieder auf gleiche Art, ausgenommen, daß man den Numerator zu finden die Coeficienten von x niemals brauchen muß: der Denominator ist vollkommen der nemliche, den man für den Werth von z gefunden hat. Es wird in diesem Exempel seyn:

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

$$y = \frac{afp - akn + dkm - dcp + gcn - gfm}{-aek + ahf - dhc + dbk - gbf + gec}$$

$$x = \frac{bfp - bkn + ekm - ecp + hcn - hfm}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

So weitläuftig und dunkel nun diese Regel immer scheinen mag, so ist sie doch in der Ausübung leicht, und kürzt die Arbeit insgemein sehr viel ab: sie kann aber leichter durch die Uebung erlernet, als mit Worten erklärt werden.

Exempel.

Es seyn $\begin{cases} 2x+3y+z=14 \\ x+2y-z=7 \\ -2x-y+z=-6 \end{cases}$

$$z=\frac{-24+14-14+18-42+56}{4-2-1-3+6+4}=\frac{8}{8}=1$$

$$y=\frac{12-14+14+6-14-28}{-8}=\frac{-24}{-8}=3$$

$$x=\frac{18-21+28+12-7-14}{8}=\frac{16}{8}=2$$

alles wie oben.

Zweytes Exempel.

Es seyn $\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ x+z=c \end{cases}$

Schreibe man diese Gleichungen also an:

$$\begin{array}{l} x+y\ *=a \\ *+y+z=b \\ x\ \ *+z=c \end{array}$$

$$z=\frac{c+b-a}{1+1}=\frac{c+b-a}{2} \text{ wie oben.}$$

$$y=\frac{c-b-a}{-2}=\frac{b+a-c}{2} \text{ wie oben.}$$

$$x=\frac{c-b+a}{2} \text{ wie oben.}$$

Neunter Abschnitt.

Wie die algebraischen Gleichungen zu finden sind.

§. 107.

Eine jede Gleichung muß durch die Bedingnisse, welche die Aufgabe bey sich hat, aufgelöset werden. Aus diesen Bedingnissen müssen so viele Gleichungen herausgezogen werden, als viele unbekannte, von einander unabhängige Größen in der Aufgabe sind; kann man so viele finden, so ist die Aufgabe bestimmt, das ist, es giebt nur einen Werth, oder doch nur eine bestimmte Anzahl der Werthe für jede unbekannte Größe: kann man aber aus allen gegebenen Bedingnissen nicht so viele Gleichungen finden, als unbekannte, von einander unabhängige Größen in der Aufgabe sind, so ist diese Aufgabe unbestimmt: das ist, jede unbekannte Größe kann unendlich viele verschiedene Werthe haben, durch welche alle den gegebenen Bedingnissen ein Genügen geschieht.

§. 108.

Wie die Gleichungen aus den Bedingnissen der Aufgabe herzuleiten sind, ist oft sehr schwer: man kann auch hiezu keine hinlängliche Regeln vorschreiben. Ein aufgeklärter

ter Verstand und die Uebung muß hierinn das Beßte thun. Man merke nur folgendes.

Erstens: Muß man die Aufgabe wohl verstehen, das, was gefragt wird, von dem, was bekannt, wohl unterscheiden: die unbekannten Größen durch die letzten Buchstaben des Alphabets *x*, *y*, *z*, die bekannten aber durch die ersten *a*, *b*, *c* benennen.

Zweytens: Muß man alles, was in der Aufgabe überflüßig ist, und nichts zur Sache thut, außer Acht lassen, und die Gedanken nur auf die Größen selbst, und die Verhältniße derselben richten.

Drittens: Wenn die Benennung aller Größen geschehen ist, muß man alle Bedingniße der Aufgabe aufmerksam durchgehen, und eine jede derselben algebraisch ausdrücken.

Viertens: Muß man sich hüten, daß man die Anzahl der unbekannten Größen nicht ohne Noth vermehre. Also, wenn man eine Größe, die man sucht, *x* genennt hat, und wenn man noch eine andere sucht, die aber das Doppelte, oder das Dreyfache der vorigen seyn soll, so muß man sie nicht durch *z* oder *y*, sondern mit 2 *x*, oder 3 *x* benennen. Zum Exempel.

Erste Aufgabe.

Man soll eine Summe Geldes von 4000 Gulden also unter vier Menschen theilen, daß der zweyte um 60 mehr bekomme, als der erste: der dritte um 70 mehr, als der zweyte: der vierte um 80 mehr, als der dritte.

Wenn man diese Aufgabe wohl betrachtet, so sieht man alsogleich, daß, wenn der Theil, was immer für Eines aus diesen vier Menschen bekannt wäre, man also gleich die Theile der Andern daraus herleiten könnte. Wenn z. E. der Theil des ersten bekannt wäre, dürfte man nur 60 zu selbem addiren, um den Theil des zweyten zu bekommen: und wenn man zu diesem 70 setzt, so entstünde der Theil des dritten: und wenn man abermal zu diesem 80 addirt, so wäre die Summe der Theil des vierten. Es hangen also alle vier Größen, die man sucht, von einander ab, und ist folglich nur eine unbekannte Größe in der Aufgabe, und eben darum nur eine Gleichung zu finden nothwendig.

Nachdem man die Sache also bedacht hat, schreite man zu der Benennung. Man benenne einen aus den vier Theilen, etwa den ersten, x. Die bekannten Größen der Aufgabe sind diese, 4000, 60, 70, 80: benenne diese mit den ersten Buchstaben des Alphabets, und setze man a anstatt 4000, b anstatt

60,

60, c anstatt 70, d anstatt 80. Nun durchgehe man alle Bedingniße, und drücke man eine jede also gleich algebraisch aus. Man wird etwa also schließen:

Der erste Theil sey : : : : : : x

Der zweyte muß um 60, oder um b größer seyn, als der erste: er wird also seyn : : : : $x+b$

Der Theil des dritten muß um 70 oder c größer seyn, als der des zweyten: der Theil des dritten ist also : $x+b+c$

Der Theil des vierten muß um 80 oder um d größer seyn, als jener des dritten: Er wird also seyn $x+b+c+d$

Die Summe aller dieser vier Theile muß 4000 oder a ausmachen. Ich habe also diese Gleichung $4x+3b+2c+d=a$

Wenn man diese Gleichung nach den Regeln, die oben gegeben worden, auflöset, so findet man $x=\frac{a-3b-2c-d}{2}$: und wenn man für die Buchstaben wieder ihre Zahlen setzt, so hat man

$$x=\frac{4000-180-140-80}{4}$$

$$=\frac{4000-400}{4}=\frac{3600}{4}=900$$

 Nun

Nun ist nichts leichters, als die Theile der übrigen zu finden.

$x = 900$ der Theil des ersten.
$+60$

960 der Theil des zweyten.
$+70$

1030 der Theil des dritten.
$+80$

1110 der Theil des vierten.

Wenn man diese vier Theile zusammen addirt, so ist die Summe 4000, wie es die Aufgabe verlangt, welches dann ein sicherer Beweis ist, daß die verlangten vier Theile richtig sind gefunden worden.

Zweyte Aufgabe.

Man soll vier Zahlen finden, deren Summe 33000 ausmache. Die zweyte Zahl soll aber zweymal so groß, als die erste: die dritte dreymal so groß seyn, als die zweyte: die vierte viermal so groß, als die dritte.

Nenne man die erste Zahl : : x

Die zweyte muß zweymal so groß seyn. Also ist sie : : : : $2x$

Die dritte muß dreymal so groß seyn als die zweyte. Sie ist also : : $6x$

Die

Die vierte muß viermal so groß seyn als die dritte: folglich ist sie , , $24x$

Die Sume aus allen vieren ist 33000: es entsteht also die Gleichung $33x = 33000$.

Die Auflösung dieser Gleichung giebt

$x = 1000$ die erste Zahl
$\times 2$
2000 die zweyte
$\times 3$
6000 die dritte
$\times 4$
24000

Die Summe aller vier ist 33000, wie es verlangt wurde.

Dritte Aufgabe.

Man soll drey Zahlen finden, derer Summe 360 (a) ausmache, und welche überdas so beschaffen sind, daß, wenn die zweyte Zahl durch die erste dividirt wird, der Quotient 5 (b) sey; wenn aber die dritte durch die zweyte dividirt wird, der Quotient 6 (c) entstehe.

Nenne man die erste aus den gesuchten Zahlen , , , , , x

Die zweyte , , , , , y

Die dritte , , , , , z

Weil alle drey zusammen 360 (*a*) ausmachen, so hat man diese erste Gleichung : : : $x+y+z=a$

Weil die zweyte durch die zweyte dividirt *b* zum Quotienten giebt: so entsteht diese Gleichung : : $\frac{y}{x}=b$

Weil die dritte durch die zweyte dividirt *c* zum Quotienten giebt; so ist $\frac{z}{y}=c$

Man hat also gleichwie drey unbekannte Größen, also auch drey Gleichungen: die Aufgabe ist also bestimmt.

Die Auflösung giebt $z=\frac{abc}{1+b+bc}=300$

$$y=\frac{ab}{1+b+bc}=50$$

$$x=\frac{a}{1+b+bc}=10$$

Nun ist die Summe dieser drey Zahlen 360. Zweytens: die zweyte Zahl 50 durch die erste 10 dividirt, giebt 5 zum Quotienten. Drittens: die dritte Zahl 300 durch die zweyte 50 dividirt, giebt 6 zum Quotienten: alles, wie es die Bedingniße der Aufgabe erfordern.

Erste Anmerkung. Weil die Auflösung immer weitläuftiger wird, je mehr unbekannte Größen darinn vorkommen, so kann man diese Aufgabe etwas leicher auflösen, wenn man also folgern würde.

Die erste aus den dreyen gesuchten Zahlen sey : : : : : x

Die zweyte : : : : : y.

Die dritte ist nicht nöthig durch einen neuen Buchstaben zu benennen. Denn, weil die Summe aller drey a gleich seyn muß, so muß die dritte der Rest seyn, welcher überbleibt, wenn die erste und zweyte von der Summe abgezogen wird.

Die dritte kann also heißen $a-x-y$

Nun giebt die zweyte durch die erste dividirt, b zum Quotienten, also ist $\frac{y}{x}=b$

Die dritte durch die zweyte dividirt, giebt c zum Quotienten, folglich ist

$$\frac{a-x-y}{y}=c$$

So hat man dann, gleichwie zwo unbekannte Größen, also auch zwo Gleichungen. Man kann hiemit die gesuchten Zahlen finden. Die Auflösung giebt

$x=$

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{bc+b+1} = 10 \\ y &= \frac{ba}{bc+b+1} = 50 \\ a-x-y &= 360-50-10=300 \end{aligned}\right\}\text{alles wie zuvor.}$$

Aus diesem sieht man, daß man zuweilen eine in der Aufgabe gesetzte Bedingniß entweder brauchen könne, eine Gleichung zu finden, oder die Benennung also zu machen, daß eine unbekannte Größe ersparet werde.

Zweyte Anmerkung. Ja man kann eben diese Augabe also auflösen, daß nur eine unbekannte Größe in die Auflösung komme, wenn man sich nur eines Grundsatzes, der in der Arithmetik ist erwiesen worden, erinnern will. Denn man kann also folgern:

Die erste aus den gesuchten dreyen Zahlen soll heißen : : : : x

Die zweyte durch die erste dividirt muß 5 (b) zum Quotienten geben: weil also der Divisor durch den Quotienten multiplicirt, den Dividendus hervorbringt, so muß die zweyte aus den gesuchten Zahlen seyn : : : : bx

Die dritte durch die zweyte dividirt, muß 6 (c) zum Quotienten geben. Also muß die dritte seyn : : : bcx

Alle

Alle drey zusammen müssen 360 (a) ausmachen: man hat also diese Gleichung : : : : $x+bx+bcx=a$

Hieraus entsteht

$$x=\frac{a}{1+b+bc}=10 \text{ die erste}$$

$$bx=\frac{ab}{1+b+bc}=50 \text{ die zweyte}$$

$$bcx=\frac{abc}{1+b+bc}=300 \text{ die dritte}$$

alles wie zuvor.

Vierte Aufgabe.

Ein Student ist dem Müßiggange ziemlich ergeben. Sein Vater will ihn zum Studieren antreiben, er legt ihm etwas zu erlernen vor, und macht zugleich folgenden Vertrag mit ihm. Für jeden Tag, den er fleißig zum Studieren angewendet haben werde, wolle er ihm 5 Gulden zur Belohnung geben. Für jeden hingegen, den er mit Müßiggehen verzehren würde, müsse er ihm 4 Gulden zur Strafe bezahlen. Nach 72 Tagen hat der Jüngling das ihm vorgelegte erlernet, und begehrt dafür den versprochenen Lohn: der Vater hält die Tage, die er gearbeitet, gegen denen, die er im Müßiggange hat verstreichen lassen, und zeigt ihm, daß er ihm gar nichts schuldig sey, und auch nichts von

ihm zu fordern habe. Nun fragt man: wie viele Tage er studiert, wie viele er mit Müßiggange zugebracht habe?

Man wird also folgern:

Die Tage der Arbeit sollen heißen : x

Die Tage des Müßiggangs werden also heißen : : : : $72-x$

Für einen Tag der Arbeit hat er 5 Gulden zu fodern. Man muß also die Tage der Arbeit durch 5 multipliciren, damit man jene Summe erhalte, die er von dem Vater für seine Arbeit zu fodern hat. Diese Summe ist also : $5x$

Für einen Tag des Müßiggangs muß er 4 Gulden Strafe bezahlen. Man muß also $72-x$ die Tage des Müßiggangs mit 4 multipliciren, so bekommt man die Summe, die er dem Vater zurück zu zahlen schuldig ist. Diese ist also : : $\overline{72-x}\times 4$ oder $288-4x$

Nun aber ist weder der Vater dem Sohne, noch der Sohn dem Vater etwas schuldig. Der Lohn für die Arbeit muß also der Strafe für den Müßiggang gleich seyn. Folglich ist $5x=288-4x$

Die Auflösung giebt : : $x=32$ die Tage der Arbeit.

Dieses von 72 abgezogen giebt : 40 die Tage des Müßiggangs.

Und

Und in der That 32 Tage der Arbeit, jeden für 5 Gulden angeschlagen, verdienen 160 Gulden: 40 Tage des Müßiggangs jeden zu 4 Gulden Strafe gerechnet, machen abermal 160 Gulden: die Strafe hebt also die Belohnung auf, der Sohn hat vom Vater, und dieser vom Sohne nichts zu fodern.

Fünfte Aufgabe.

Ein Hauptmann hat mit seinem untergebenen Commando eine Beute erobert: er will sie unter seine Soldaten austheilen. Wenn er jedem 5 Gulden geben wollte, so erkleckt die Beute nicht, es gehen ihm 300 Gulden ab. Giebt er aber jedem nur 4 Gulden, so bleiben ihm 200 Gulden übrig. Wieviel waren es Soldaten, wie groß war die Beute?

Man folgere also:

Die Anzahl der Soldaten sey : : x

Wenn er jedem 5 Gulden gäbe, so würde sich die ganze Ausgabe auf so vielmal 5 Gulden belaufen, als viele Soldaten sind, nämlich auf $5x$. Nun aber ist die Beute um 300 Gulden zu klein. Die Beute ist also : $5x - 300$

Giebt er jedem Soldaten nur 4 Gulden, so beläuft sich die Ausgabe auf $4x$: es bleiben ihm aber alsdenn 200 Gulden

von

von der Beute über. Die ganze Beute ist also : : : : : $4x+200$

Weil nun der erste Ausdruck $4x-300$ die Beute ausdrückt, und der zweyte Ausdruck $4x+200$ eben diese Beute anzeigt, so müssen diese zween Ausdrücke einander gleich seyn. Man hat also diese Gleichung : $5x-300=4x+200$

Die Auflösung giebt : : $x=500$

Es waren also 500 Soldaten. Multiplicirt man diese mit 5, so ist das Product 2500, zieht man 300 davon ab, so ist der Rest 2200 Gulden die Größe der Beute. Multiplicirt man gemäß der zweyten Bedingniß die Anzahl x der Soldaten mit 4, so ist das Product 2000: addirt man 200 dazu, so ist die Summe 2200 Gulden abermal die Größe der Beute. Und weil diese beyderseits gefundene Summe die nemliche ist, so erkennt man, daß die Auflösung richtig sey.

Erste Anmerkung. In diesem Exempel sieht man, daß es zuweilen, um eine Gleichung zu finden, nothwendig ist, die nemliche Sache auf zweyerley Arten auszudrücken, welche zween Ausdrücke der nemlichen Sache alsdenn einander nothwendig gleich seyn müssen. Also hat man in gegenwärtigem Exempel zween Ausdrücke der Beute gesucht: und diese beyden alsdenn mit einander verglichen.

Zweyte

Zweyte Anmerkung. Wenn man in gegenwärtiger Aufgabe, anstatt der bekannten Größen Buchstaben des Alphabets, etwa a anstatt 5, b anstatt 4, p anstatt 300, q anstatt 200 gesetzt hätte; so würde die Gleichung also gestanden seyn : $ax-p=bx+q$

Die Auflösung hätte gegeben $x=\frac{p+q}{a-b}$

Nun diese mit Buchstaben gemachte Auflösung wäre allgemein, und würde immer dienen, man möchte die in der Aufgabe gegebenen Zahlen ändern, wie man wollte. Ja, man kann aus dieser allgemeinen Auflösung eine allgemeine Regel für die Beantwortung aller dergleichen Fragen herleiten. Die Regel würde diese seyn. Die Anzahl derer, unter welche die Austheilung geschehen muß, ist allezeit gleich der Summe aus dem Abgange bey der ersten, und aus dem Ueberschuße bey der zweyten Austheilung, dividire man durch die Differenz zwischen den Zahlen, welche in beyden Theilungen für einen jeden bestimmt sind. Und wenn also diese Differenz 1 ist, so ist die Anzahl, unter welche die Austheilung geschehen muß, gleich der besagten Summe.

Sechste Aufgabe.

Ein Wasserbehältniß faßt 800 (a) Eymer. Aus dreyen Röhren fließt Wasser darein.

Das erste, wenn es allein laufen sollte, würde in 3 (b) Tagen das Behältniß anfüllen: das zweyte in 4 (c) Tagen: das dritte in 6 (d) Tagen. Wie bald wird das Behältniß voll seyn, wenn alle drey zugleich laufen?

Man nenne die Zeit, die man sucht x

Nun folgere man also. Das erste Rohr giebt in b Tagen das Wasser a: wieviel giebt es in der Zeit x? Man findet nach der Regel der Proportion : $\frac{ax}{b}$

Das zweyte Rohr giebt in der Zeit c das Wasser a: was giebt es in der Zeit z? Man findet : : : $\frac{ax}{c}$

Das dritte Rohr giebt in der Zeit d das Wasser a: was giebt es in der Zeit x? Man findet : : : : $\frac{ax}{d}$

Nun muß das Wasser, welches in der Zeit x aus allen dreyen Rohren zugleich fließt, das Behältniß anfüllen, und also die Eymer a ausmachen. Man hat also diese Gleichung : $\frac{ax}{b}+\frac{ax}{c}+\frac{ax}{d}=a$

Die Auflösung giebt

$$x=\frac{abcd}{acd+abd+abc}=\frac{bcd}{cd+bd+bc}=\frac{3\times4\times6}{24+18+12}$$

: : : : : $=\frac{72}{54}=1\frac{1}{3}$.

Sie=

Siebente Aufgabe.

Als einer gefragt wurde, wieviel es auf der Uhr wäre, antwortete er: der Stundenzeiger stehe zwischen 4 und 5 Uhr, der Minutenzeiger aber stehe genau ober dem Stundenzeiger. Wie viele Minuten war es über 4 Uhr?

Man nenne die Anzahl dieser Minuten x und folgere also: Da es genau 4 Uhr war, gieng der Stundenzeiger von der vierten, der Minutenzeiger von der zwölften Stunde weg. Nun ist es klar, daß der Minutenzeiger, bis er den Stundenzeiger erreicht, den Raum, welcher zwischen der zwölften und vierten Stunde liegt, durchlaufen muß, und noch überdas jenen Raum, welchen der Stundenzeiger in der Zeit x durchlauft. Wenn man den Raum, der zwischen der zwölften und vierten Stunde liegt, in dem in Minuten eingetheilten Cirkel nimmt, so sind es 20 (a) Minuten. Innerhalb 60 Minuten der Zeit durchlauft der Stundenzeiger 5 Minuten eben desselben Cirkels: wieviel durchlauft er also in der Zeit x? Man findet $\frac{5x}{60}$ oder $\frac{x}{12}$: $a + \frac{x}{12}$ ist also der ganze Raum, den der Minutenzeiger zu durchlaufen hat, bis er den Stundenzeiger erreicht.

Ferner ist bekannt, daß der Minutenzeiger in 60 Minuten der Zeit 60 Minuten seines

Cirkels durchlauft: wieviel durchlauft er also in der Zeit x? Man findet x. Eben dieses x ist also abermal der Raum, den der Minutenzeiger durchlaufen muß, bis er den Stundenzeiger erreicht. Man hat also diese

Gleichung $a + \frac{x}{12} = x$

und folglich $x = \frac{12a}{11} = \frac{140}{11} = 21\frac{9}{11}$.

Es war also 21 Minuten und $\frac{9}{11}$ einer Minute über vier Uhr.

Weil die ganze Rechnung vollkommen die nemliche bleibt für was immer für eine Stunde, so kann man gar leicht finden, um was für eine Minute, nach was immer für einer Stunde der Stundenzeiger den Minutenzeiger erreiche. Man darf nur in der gefundenen Formel anstatt a die gehörige Anzahl der Minuten setzen.

Achte Aufgabe.

Ein Vater sagte zu seinem Sohne: das Geld, das ich in meiner Hand verschlossen halte, soll dein seyn, wenn du mir durch die Rechnung bestimmest, wieviel es Kreuzer sind. Nun merke: Wenn du die Zahl der Kreuzer, die ich halte, halb nimmst, und über das den dritten und den siebenten Theil derselben, so kommt eine Summe heraus, die

die um 1 kleiner ist, als die Zahl der Kreuzer, die in meiner Hand sind.

Die Zahl der Kreuzer sey : : : x

Die Hälfte wird seyn : : : $\frac{x}{2}$

Der dritte Theil : : : : $\frac{x}{3}$

Der siebente : : : : $\frac{x}{7}$

Nun diese drey Brüche zusammen, müssen der Zahl x gleich seyn weniger 1. Man hat also diese Gleichung:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{7}=x-1.$$

Also ist $x=42$ die Anzahl der Kreuzer.

Neunte Aufgabe.

Einige Studenten gehen in ein Wirthshaus, und lassen sich wohl auftragen. Die Zeche macht 3 Gulden und 12 Groschen, oder 72 Groschen. Zween werden von den übrigen zechfrey gehalten. Nun muß ein jeder um 3 Groschen mehr bezahlen, als er hätte zahlen müssen, wenn alle an der Zeche gleich Theil genommen hätten. Wieviel waren es Studenten? Was mußte einer bezahlen?

Die Zahl der Studenten sey : : x

Die Zahl derer, die bezahlen, wird seyn : : : : : : $x-2$

Wenn alle bezahlt hätten, so hätte Einen getroffen : : : : : $\frac{72}{x}$

Nun aber trifft jeden : : $\frac{72}{x-2}$

Dieses letzte ist um 3 größer, als das vorgehende; also ist:

$$\frac{72}{x-2}=\frac{72}{x}+3$$

$$72x=72x-144+3x^2-6x$$

$$3x^2-6x=144$$

$$x^2-2x=48$$

$$x^2-2x+1=48+1=49$$

$$x-1=\pm\sqrt{49}=\pm 7$$

$$x=1\pm 7=8 \text{ oder auch } -6.$$

Es waren also 8 Studenten: 6 zahlten die Zeche: es traf also einen jeden $\frac{72}{6}$ oder 12 Groschen. Hätten alle acht bezahlt, so hätte einen getroffen $\frac{72}{8}$, das ist, 9 Groschen. Nun ist ja 12 um 3 größer als 9; wie es die Aufgabe erfordert. Die negative Wurzel kann man in dieser Aufgabe nicht brauchen.

Zehnte Aufgabe.

In dem Jahre 1772 war ein Vater 50 (a), sein Sohn 21 (b) Jahre alt. Nun fragt man, in was für einem Jahre dieses laufenden Jahrhunderts wird der Vater eben noch so alt, als der Sohn seyn?

Die Zahl der Jahre, welche beyde noch leben müssen, bis der Vater noch so alt als der Sohn ist, nenne man : : : x

Wenn diese Jahre x verstrichen sind, so wird der Vater $a+x$ Jahre, der Sohn $b+x$ Jahre alt seyn. Nun ist der Vater alsdenn eben noch so alt als der Sohn. Also ist

$$a+x=\overline{b+x}\times 2=2b-+2x$$

$$2x-x=a-2b$$

$$x=a-2b=50-42=8.$$

Sie müssen also beyde noch acht Jahre leben. Also wird im Jahre 1780 der Vater noch so alt als der Sohn seyn. In der That der Vater wird dazumal 58, der Sohn 29 Jahre haben. Nun aber ist $58=29\times 2$. Die allgemeine Auflösung zeigt, daß in all dergleichen Aufgabeu das Alter des Sohns müsse doppelt genommen, und alsdenn von dem Alter des Vaters abgezogen werden. Wenn dieses doppelte größer wäre, als das Alter des Vaters, so würde der Werth von x negativ werden. Welches dann eine An-

zeige wäre, daß jene Zeit, da der Vater noch so alt als der Sohn war, schon verstrichen sey, und nicht erst kommen werde, und zwar um so viele Jahre, als der negative Werth von x Einheiten hat. Z. Ex. wenn man setzte, der Vater sey in dem Jahre 1772, 50 Jahre, der Sohn aber 26 Jahre alt gewesen; so gäbe die allgemeine Formel $x = a - 2b = 50 - 52 = -2$. Der Vater war also zwey Jahre zuvor, nemlich im Jahre 1770 noch so alt, als sein Sohn.

Elfte Aufgabe.

Ein Wirth hat zweyerley Wein. Eine Maaß des bessern verkauft er um 10 (a) Kreuzer: eine Maaß des schlechtern um 6 (b) Kreuzer. Er will beyde unter einander mischen, also, daß die Mischung 2400 (m) Maaße ausmache, und eine Maaß 7 (c) Kreuzer werth sey. Wieviel muß er von dem bessern, wieviel von dem schlechtern nehmen?

Die Anzahl der Maaßen des bessern sey x

Des schlechtern : : : $m - x$

Eine Maaß des bessern gilt a Kreuzer: weil also x die Anzahl der Maaße dieses Weins ist; so muß ax den Werth alles bessern Weins, der in die Mischung kommt, ausdrücken.

Aus gleicher Ursache muß $bm - bx$ den Werth alles schlechtern Weins, der in die Mischung kömmt, ausdrücken. Folglich ist der Werth der ganzen Mischung $ax + bm - bx$.

Nun sind die Maaße der Mischung m: der Werth einer Maaß ist c: also ist cm abermal der Werth der ganzen Mischung.

Nun steht diese Gleichung also:

$$ax + bm - bx = cm.$$

Die Auflösung giebt

$$x = \frac{cm - bm}{a - b} = 600$$ Die Anzahl der Maaßen des bessern Weins.

Von dem schlechtern Weine muß genommen werden $m - x$, das ist, $m \frac{-cm + bm}{a - b}$.

Wenn man dieses unter einen Nenner bringt, so hat man $\frac{am - bm - cm + bm}{a - b}$ oder $\frac{am - cm}{a - b} = 1800$.

Erste Anmerkung. Die allgemeine in Buchstaben gemachte Auflösung giebt eine Regel an die Hand, alle dergleichen Aufgaben aufzulösen. Die Formel für den bessern Wein war $\frac{cm - bm}{a - b}$ oder $\frac{\overline{c - b} \times m}{a - b}$. Man muß also,

um die Anzahl der Maaßen des bessern zu bekommen, die Differenz zwischen dem mittlern und geringern Werthe nehmen, selbe mit der Anzahl der Maaßen der ganzen Mischung multipliciren: und dieses Product durch die Differenz der Werthe des bessern und schlechtern dividiren. Die Formel für den schlechtern Wein war $\frac{am-cm}{a-b}$ oder $\frac{\overline{a-c}\times m}{a-b}$.

Man muß also, um die Anzahl der Maassen des schlechtern zu bekommen, die Differenz zwischen dem Werthe des bessern und des mittlern nehmen; diese mit der Anzahl der Maassen der ganzen Mischung multipliciren; das Product durch die Differenz der Werthe des bessern und des schlechtern dividiren.

Zweyte Anmerkung. Wenn man keine gewisse Maaß giebt, welche die ganze Mischung haben soll, sondern nur fragt, in was für einem Verhaltniße beyde Dinge müssen vermischet werden, damit eine gewiße Maaß der Mischung den gegebenen Werth bekomme, so können eben die vorigen Formeln dienen. Die Anzahl der Maaßen der bessern Sache muß sich zu der Anzahl der Maaßen der schlechtern verhalten, wie $\frac{cm-bm}{a-b}$ zu $\frac{am-cm}{a-b}$ und weil in diesen beyden Ausdrücken der Nenner beyderseits der nemliche ist, so kann er weggelassen werden, ohne hiedurch das Verhältniß

hältniß zu ändern: ja auch der Factor m, weil er beyden Ausdrücken gemein ist, kann ausgelassen werden. Die Maaßen des bessern müssen sich also verhalten zu den Maaßen des schlechtern, wie $c-b$ zu $a-c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anstatt eines schlechtern Weins Wasser mischen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit diesem Unterschiede, daß b gleich o wäre, und also jene Theile, welche das b in sich haben, wegfielen. Die Formel für den bessern Wein $\frac{cm-bm}{a-b}$ würde also in diese verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Wasser $\frac{am-cm}{a-b}$ in diese $\frac{am-cm}{a}$.

Ende des zweyten Theils.

Bayerische
Staatsbibliothek
MÜNCHEN

beständig zu ändern; so auch der Factor m, weil er beyden Mischungen gemein ist, kann ausgelassen werden. Die Massen des bessern müssen sich also verhalten zu den Massen des schlechtern, wie $c-b$ zu $a-c$.

Dritte Anmerkung. Wenn man unter den Wein anstatt eines schlechtern Weins Wasser mischen wollte, könnten eben die oben gefundenen allgemeinen Formeln dienen, allein mit diesem Unterschiede, daß b gleich o wäre, und also jene Glieder, welche das b in sich haben, wegfielen. Die Formel für den bessern Wein $\frac{cm - bm}{a - b}$ würde also in diese verwandelt werden $\frac{cm}{a}$. Die Formel für das Wasser $\frac{am - cm}{a - b}$ in diese $\frac{am - cm}{a}$.

Ende des zweyten Theils.

Der guten und fleißigen Jugend.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Spengler, Joseph,

Joseph Spenglers ... Anfangsgründe der Rechenkunst und Algebra

Augsburg 1800

Math.u. 307 q
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594458-6
VD18 14713969-001